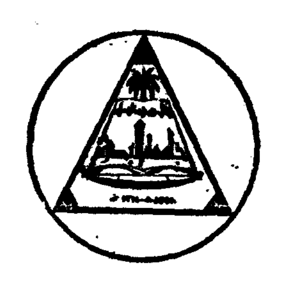


جامعـــة البصــرة

دار الحكمـــة

الجبر الخطي

تأليف

الدكتور جورج ضايف السبتي

كليـة العلــوم

١٩٨٨

مقدمــة

يقدم هذا الكتاب معالجة مبسطة لموضوع الجبر الخطي ومناسبة لطلبة الصف الثاني رياضيات في كليات العلوم. الكتاب يتطلب معرفة بالمواضيع الاساسية في التفاضل والتكامل (المشتقة، الاستمرارية، التكامل) وكذلك يتطلب معرفة والمام بالمصفوفات وجبرها وكذلك بالمحددات (وهذا مادرسه الطالب في موضوع طرق رياضية في الصف الاول).

لقد كان هذا الكتاب ثمرة خبرة تدريسية في موضوع الجبر الخطي للصف الثاني وموضوع الجبر الخطي المتقدم لطلبة الدراسات العليا، فقد درست الموضوع لاكثر من ستة مرات، حيث من خلالها تعرفت على نقاط الضعف والصعوبات التي يواجهها الطالب وحاولت توضيح وتذليل تلك الصعوبات من خلال تعدد الامثلة الايجابية (التي توضح المفهوم) والامثلة السلبية (التي توضح عدم انطباق المفهوم).

لقد حاولت في هذا الكتاب الجمع بين المفاهيم المعقدة والعامة والشاملة، الجمع بين هذا كله ومجموعة كبيرة من الامثلة التي تداخلت مع تلك المفاهيم لتوضيحها وتبسيطها لكي تبدو خالية من التعقيد والصعوبة. (قارن بين كتب كثيرة في الجبر الخطي واخرى ستجدها اما قليلة الامثلة واما مليئة بالامثلة الكثيرة دون الخوض في المفاهيم الاساسية بصورة عامة وشاملة).

لقد جزأت الكتاب الى ستة فصول يتكون كل فصل منها من بنود صغيرة تلى كل منها مجموعة تمارين شاملة ومتنوعة، يقدم الفصل الاول منها مفهوم فضاء المتجهات والفضاءات الجزيئة وجبرها. ثم يتعمق في دراسة التركيب الخطي للمتجهات والاستقلال الخطي لمجموعة متجهات وهذا يؤدي الى دراسة الفضاءات

المنتهية البعد وقواعدها . لقد كانت معالجتي عامة ، اي انني قدمت دراسة فضاءات المتجهات على حقل مجرد وليس حقل الاعداد الحقيقية فقط .

ثم يعالج الفصل الثاني موضوع التحويلات الخطية بين فضائي متجهات ويدرس خصائصها وعلاقتها بالمصفوفات. لابد من الاشارة هنا الى استخدامنا المتجهات الصفية ولذلك تختلف نتائجنا عن النتائج في كتب اخرى عندما تستخدم المتجهات العمودية .

وقد قدمت في الفصل الثالث انظمة المعادلات الخطية فقد كان اهتمامي في قابلية حل النظام وعدد الحلول ولم اذكر الطرق العديدة والمتنوعة لحل انظمة المعادلات الخطية وانما اكتفيت بشرح طريقة واحدة وهي طريقة كاوس للحذف . هذا الاهتمام النظري لم يمنع من تقديم امثلة عديدة وتمارين متنوعة .

وكان الهدف الاساسي من الفصل الرابع هو دراسة مسألة تبسيط مصفوفة تحويل خطي على الفضاء نفسه . هذه المسألة لها تطبيقات كثيرة ولغرض دراستها يجب تقديم مفهوم القيم الذاتيه والمتجهات الذاتية للتحويلات الخطية والمصفوفات .

وقد تخصص الفصل الخامس في موضوع اضافة بنية جبرية جديدة على فضاء المتجهات من خلال الضرب الداخلي . فإن اضافة هذه البنية يؤدي الى دراسة الفضاءات الاقليدية التي هي عبارة عن تعميم للفضاء الاقليدي R^2 (المستوى) والفضاء الاقليدي R^3 (الفراغ) وما يمكن ان نجريه على متجهاتها من قياس للطول وقياس للمسافة وقياس للزوايا بين المتجهات .

اما الفصل السادس فقد حاولنا فيه تناول مفهوم الدوال ثنائية الخطية بشكل عام ... تطبيقاً عاماً يمكن توضيحه على الصيغ التربيعية وخصوصاً المقطوع المخروطية .

ارجو ان اكون قد وفقت في عرض موضوع الجبر الخطي بشكل بسيط وواضح . كما ارجو من زملائي الاساتذة واخواني الطلبة ان لايترددوا في طرح اي اقتراح او الاشارة الى اي خطأ لكي اتجاوز ذلك في طبعات قادمة . هذا ومن الله التوفيق .

المؤلف

المحتويـات

الموضوع الصفحة

الفصـــل الثالــث

انظمة المعادلات الخطية

الفصـــل الرابــع

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

الفصــل الخامــس

الفضاءات الاقليدية

الفصــل السادس

الصيغ الثنائية الخطية والصيغ التربيعية

الفصـــل الاول

فضاءات المتجهات Vector Spaces

(1.0) مقدمــة :

لقد تعرف الطالب على المتجهات في المستوى والفراغ في الفيزياء ولاسيما عند دراسة القوة المؤثرة على الاجسام. ان العمليات الجبرية الاساسية التي يمكن اجراؤها على تلك المتجهات هي عملية الجمع (جمع المتجهات) وعملية ضرب عدد في متجه . لقد كانت عملية جمع متجهين تنتج متجهاً وعملية ضرب عدد في متجه هي الاخرى تنتج متجهاً . هاتان العمليتان تحققان خصائص عديدة .

اذا تصورنا المتجه في المستوى عبارة عن نقطة فيه (التفاصيل في البندالاول) فهذا يعني ان مجموعة نقاط المستوى تكون ــ بلغة الجبر ــ مغلقة تحت عمليتي الجمع والضرب وهما بذلك يحققان خصائص عديدة وكذلك تكون مجموعة نقاط الفراغ. توجد في موضوع الرياضيات مجموعات كثيرة تحقق الخصائص التي ذكرناها مثل مجموعات تحتوي على مصفوفات ومجموعات تحتوي على متعددات حدود لذلك سندرس تلك المجموعات التي لها عمليات جبرية تشبه العمليات التي ذكرناها على المستوى والفراغ ، وسنطلق اسم فضاء متجهات عليها .

لغرض الدخول في دراسة تفصيلية لهذه المسألة نقدم تعريف الزمرة وتعريف الحقل وامثلة عليهما وذلك في البند الاول . هذه المقدمة عن الحقول والزمر هي عبارة عن تذكير للطالب بما درسه بصورة اكثر تفصيلاً في موضوع اسس الرياضيات بالصف الاول . كذلك فإننا سنذكر القارىء بالمتجهات في المستوى والفراغ وما تتمتع

به من خصائص وكيفية جمعها وضربها بأعداد . هذا ماسنقدمه في البند الثاني وسنقدم في البند الثالث مفهوم فضاء المتجهات بشكل عام معتمدين على معرفة الطالب بخصائص المستوى والفراغ .

البند الرابع قد خصص لدراسة تلك المجموعات الجزيئة من فضاء المتجهات والتي تكون بحد ذاتها فضاء متجهات بالنسبة للعمليات الموروثة من الفضاء الأم وسنسمي هذه المجموعات الجزيئة فضاءات جزيئة .

البند الخامس قد خصص لدراسة جبر الفضاءات الجزيئة كتقاطعها واتحادها وجمعها .

سنتناول في البند السادس مفهوم التركيب الخطي لانه اداة فاعلة في توليد الفضاءات الجزيئة وفي الدخول بدراسة تفصيلية عن فضاء المتجهات .

في البند السابع سنتطرق لمسألة الاستقلال الخطي والارتباط الخطي لمجموعة متجهات في فضاء متجهات حيث ستكون هذه المسألة الحجر الاساس لتطوير دراسة الموضوع .

ان مفهوم قاعدة فضاء المتجهات سيؤدي الى دراسة نوع مهم من فضاء المتجهات هو الفضاء المنتهي البعد . سنتطرق لتلك المفاهيم في البند الثامن .

البند الاخير في هذا الفصل قد خصص لدراسة الاحداثيات وتغيير القواعد .

(1.1) الزمر والحقول Groups and Fields

يحتوى هذا البند على تعريفي الزمرة والحقل مع امثلة تذكر القارىء وذلك لاننا سنكون بحاجة الى خصائص الحقول في كتابنا هذا . سنبدأ بتعريف الزمرة مع ذكر بعض الامثلة .

تعريف :

لتكن S مجموعة غير خالية ولتكن ⋆ عملية ثنائية معرفة عليها ، فإن الثنائي ($S,\star$) يسمى زمرة اذا وفقط اذا توفرت الشروط الاتية :

1 ـــ الخاصية التجميعية :

$a\star(b\star c)=(a\star b)\star c$ لكل $a,b,c\in S$

2 ـــ وجود العنصر المحايد :

يوجد عنصر e S بحيث

$\forall a\in S,\ e\star a=a\star e=a$.

3 ـــ وجود نظير العناصر :

لكل $a\in S$ يوجد $b\in S$ بحيث

$a\star b=b\star a=e$

(بهذه الحالة نكتب $b=a^{-1}$) .

مثال (1) :

اذا كانت Z مجموعة الاعداد الصحيحة فأن $(Z,+)$ تكون زمرة لكن (Z ، ،) ليست زمرة وذلك لعدم وجود نظير للعنصر $O\in Z$.

مثال (2) :

اذا كانت R مجموعة الاعداد الحقيقية فإن (R و +) تكون زمرة .

مثال (3) :

اذا كانت S مجموعة المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والعناصر المأخوذة من مجموعة الاعداد الصحيحة فأن S تكون زمرة تحت عملية جمع المصفوفات .

تعريف :

اذا كانت $(S,\star)$ زمرة فيقال بأنها تبادلية اذا وفقط اذا كان :

لكل $a,b\in S$ يكون $a\star b=b\star a$.

مثال (4) :

جميع الزمر المعرفة في الامثلة (1) , (2) , (3) اعلاه تكون زمراً تبادلية .

مثال (5) :

ان مجموعة المصفوفات المربعة ذات الدرجة 3×3 وذات العناصر المأخوذة من مجموعة الاعداد الحقيقية والتي يكون محدد كل منها لايساوي صفر تكون زمرة غير تبادلية تحت عملية ضرب المصفوفات .

تعريف :

لتكن S مجموعة غير خالية ولتكن كل من $\star$ ، $\#$ عملية ثنائية معرفة على S ، فأن الثلاثي $(S,\star,\#)$ يسمى حقلاً اذا وفقط اذا توفرت الشروط الاتية :

(1) $(S, \star)$ زمرة تبادلية .

(2) $(S-\{o\}, \#)$ زمرة تبادلية ، حيث $O \in S$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\star$

(3) $\forall a,b,c,\in S,\ a \# (b\star C) = (a \# b)\star(a \# C)$

والخاصية اعلاه تسمى خاصية التوزيع .

مثال (6) :

الثلاثي $(R, +, .)$ هو حقل ويسمى حقل الاعداد الحقيقية .

مثال (7) :

الثلاثي $(C, +, .)$ هو حقل ويسمى حقل الاعداد العقدية .

ملاحظة :

سوف نرمز دائماً للعنصر المحايد بالنسبة للعملية الاولى $\star$ بالرمز O

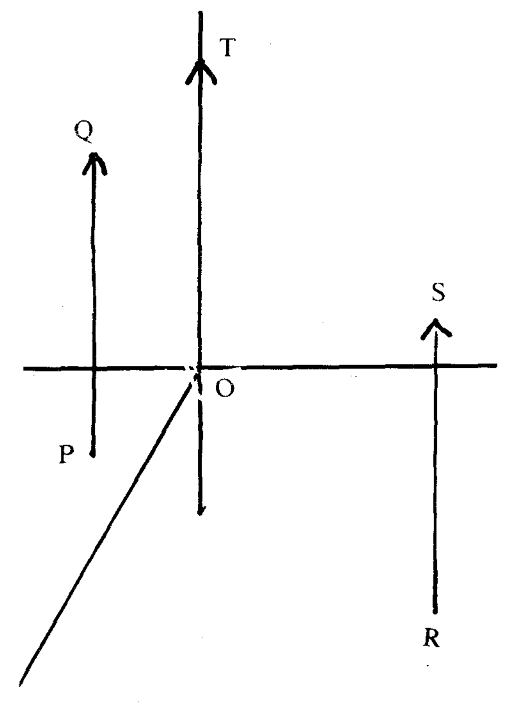
وسوف نرمز للعنصر المحايد بالنسبة للعملية الثانية # بالرمز I وذلك في اي حقل من الحقول (#, ⋆, F) .

(1-2) المتجهات في المستوى والفراغ Vectors in Plane and Space

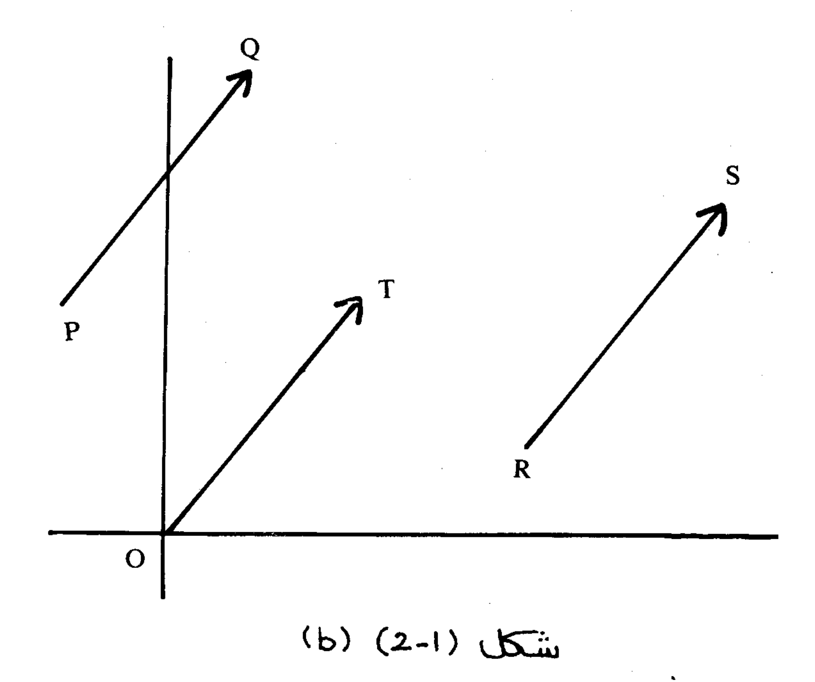
في الفيزياء توجد مفاهيم كالقوة والازاحة والسرعة والتعجيل يحتاج وصفها الى كمية واتجاه . لقد جرت العادة على تمثيل المفاهيم اعلاه بأسهم ذات اطوال ترمز للكمية ورأس السهم يرمز الى الاتجاه .

في المستوى والفراغ يمكن وصف اي متجه على انه :وج مرتب من النقاط (P,Q) وهذا يمثل متجه من P الى Q ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{PQ}$ بهذه الحالة P تسمى نقطة البداية و Q تسمى نقطة النهاية .

سوف نقول بأن المتجهين متساويان اذا تساويا في الطول وكان لهما نفس الاتجاه (انظر الشكل (1-2)) .



شكل (2-1) (أ)

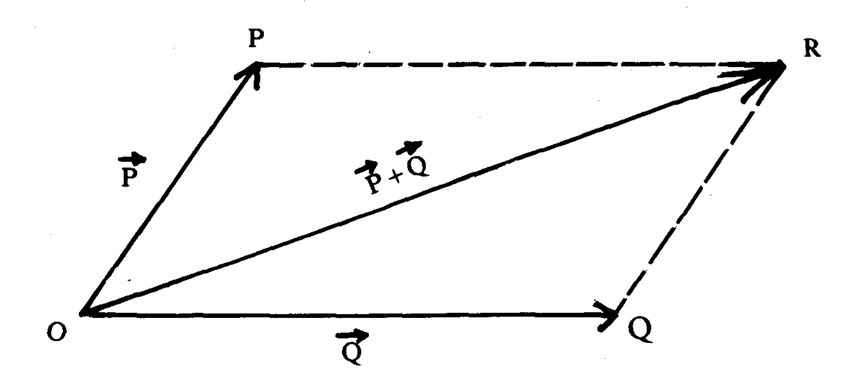


شكل (2-1) (b)

في الشكل اعلاه، المتجهان $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{RS}$ متساويان ويمثلان نفس المتجه $\overrightarrow{OT}$

بهذا المفهوم للتساوي يمكننا ان نختار نقطة ثابتة O في المستوى او الفراغ ونعتبرها نقطة بداية لكل المتجهات وبهذا يمكننا ان نختصر المتجه $\overrightarrow{OT}$ الى $\overrightarrow{T}$.
$\overrightarrow{T}$ يسمى متجه الموضع للنقطة T بالنسبة لنقطة الاصل O .

إن المتجهات التي تمثل القوى في الفيزياء يمكن جمعها لتنتج قوة جديدة تسمى محصلة القوى وذلك كالأتي :ـ
لو كان لدينا متجهان $\overrightarrow{Q}, \overrightarrow{P}$ فإن جمعهما كما مبين في الشكل (2-2) .



شكل (2-2)

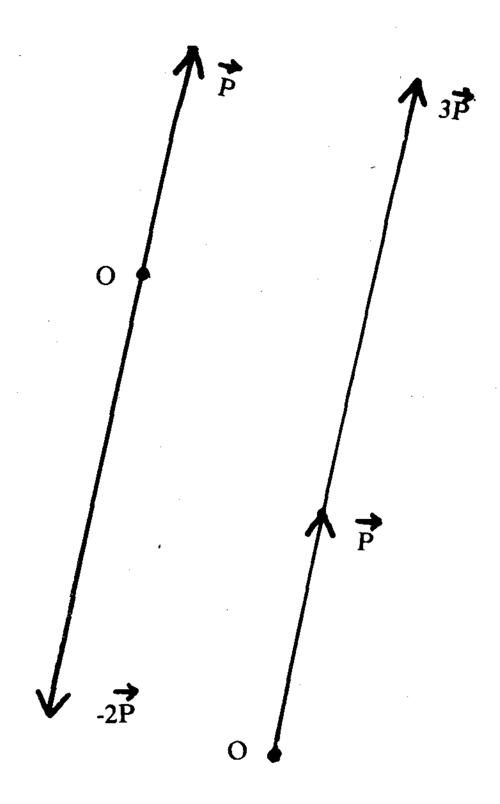
اي اننا نكمل متوازي الاضلاع الناشيء من النقاط الثلاث O,P,Q ونرمز للرأس الرابع بالرمز R ثم نضع $\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$ ، يمكن التحقق من القوانين الثلاثة الاتية ببساطة .

(1) $\vec{P}+\vec{Q}=\vec{Q}+\vec{P}$
(2) $(\vec{P}+\vec{Q})+\vec{R}=\vec{P}+(\vec{Q}+\vec{R})$
(3) $\vec{P}+\vec{O}=\vec{O}+\vec{P}=\vec{P}$

كذلك بالامكان تعريف ضرب متجه بعدد كالاتي :
لنفترض ان $\vec{P}$ متجهاً وان a عدداً حقيقياً .
اذا كان $a > o$ فنعرف المتجه $a\vec{P}$ على انه متجه بأتجاه $\vec{P}$ لكن طوله يساوي طول $\vec{P}$ مضروب في a (انظر الشكل 3-2)

اذا كان $a < o$ فنعرف المتجه $a\vec{P}$ على انه متجه بعكس اتجاه $\vec{P}$ لكن طوله يساوي طول $\vec{P}$ مضروب في a- (انظر الشكل 3-2) .

اذا كان $a = o$ فنعرف $a\vec{P}$ على انه يساوي O (المتجه الصفري) .



شكل (2-3)

بذلك يمكن تحقيق القوانين التالية :

(4) $\vec{P} + (-1)\vec{P} = \vec{O}$

(5) $a(\vec{P} + \vec{Q}) = a\vec{P} + a\vec{Q}$

(6) $(a + b)\vec{P} = a\vec{P} + b\vec{P}$

(7) $(ab)\vec{P} = a(b\vec{P})$

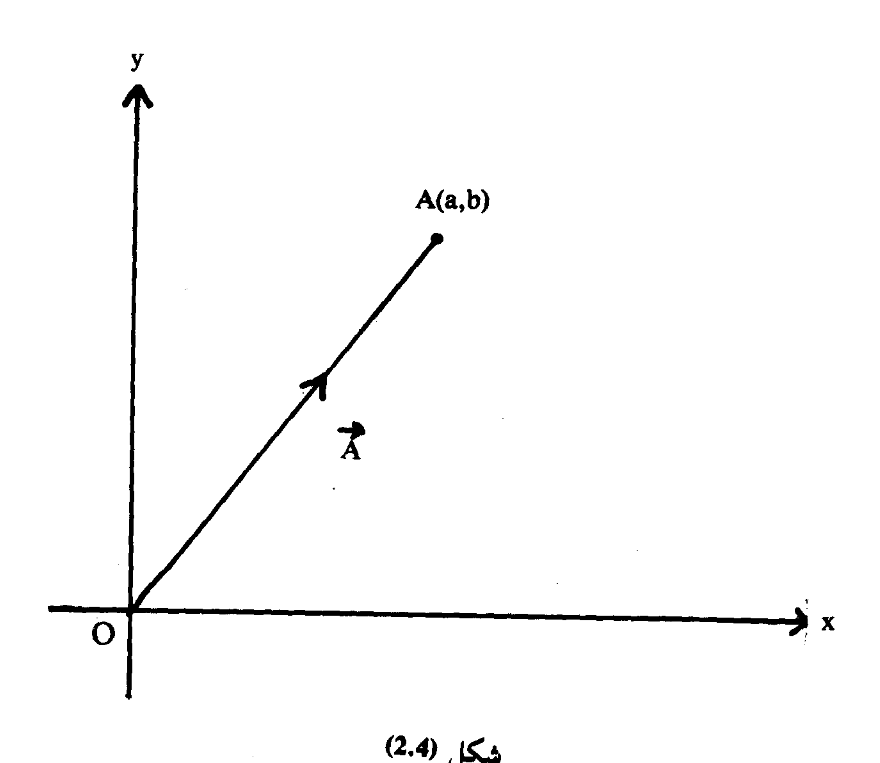
(8) $O\vec{P} = O,\ 1.\vec{P} = \vec{P}$

لاحظ ان القانون (6) يسمح بتوزيع المتجهات على الاعداد كما سمح

القانون (5) بتوزيع الاعداد على المتجهات ، كما ان (+) ذكرت في (5) و (6) مرتين احداهما تعني الجمع الاعتيادي للاعداد والاخرى تعني جمع المتجهات .

الان نستحدث احداثيات في المستوى بحيث ان كل نقطة P في المستوى تكتب على شكل $P(x,y)$ واحداثيات في الفراغ بحيث ان كل نقطة P في الفراغ تكتب على شكل $P(x,y,z)$ حيث x,y,z اعداداً حقيقية .

اعتبر ان $\vec{A}$ هو اي متجه في المستوى وافرض ، كما في الشكل (2.4) ان $\vec{A}$ قد وضع بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الاصل لنظام الاحداثيات والنقطة $A(a,b)$ تكون نقطة نهايته ، عندئذ نكتب : $\vec{A}=(a,b)$. (اي ان $\vec{A}$ هو متجه الموضع للنقطة A) .



شكل (2.4)

اذا وضع متجهان متساويان $\vec{B},\vec{A}$ بحيث تقع نقطتا بدايتهما عند نقطة الاصل فإنه من الواضح ان نقطتي نهايتهما يجب ان تنطبقا (لان المتجهين لهما نفس الطول والاتجاه) . ولهذا يكون للمتجهين الاحداثيات نفسها . وبالوضوح نفسه فأن المتجهات التي لها الاحداثيات نفسها يجب ان يكون لها الطول نفسه والاتجاه نفسه ومن ثم تكون متساوية وملخص ذلك هو ان المتجهين

$$\vec{B}=(b_1, b_2)\ ,\ \vec{A}=(a_1, a_2)$$

يكونان متساويين اذا وفقط اذا كان :

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2$$

ويمكن بسهولة اجراء عمليات جمع المتجهات والضرب في اعداد بدلالة الاحداثيات وذلك كما يلي : اذا كان $\vec{B}=(b_1,b_2), \vec{A}=(a_1, a_2)$

فإن : $\vec{A}+\vec{B}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$

واذا كان $\vec{A}=(a_1,a_2)$ و r اي عدد حقيقي فإنه بالامكان اثبات ان :

$$r\vec{A}=(ra_1, ra_2)$$

فمثلاً اذا كان $\vec{B}=(-3,0), \vec{A}=(1,2)$ فإن

$$\vec{A}+\vec{B}=(1,2)+(-3,0)=(1-3,2+0)=(-2,2)$$

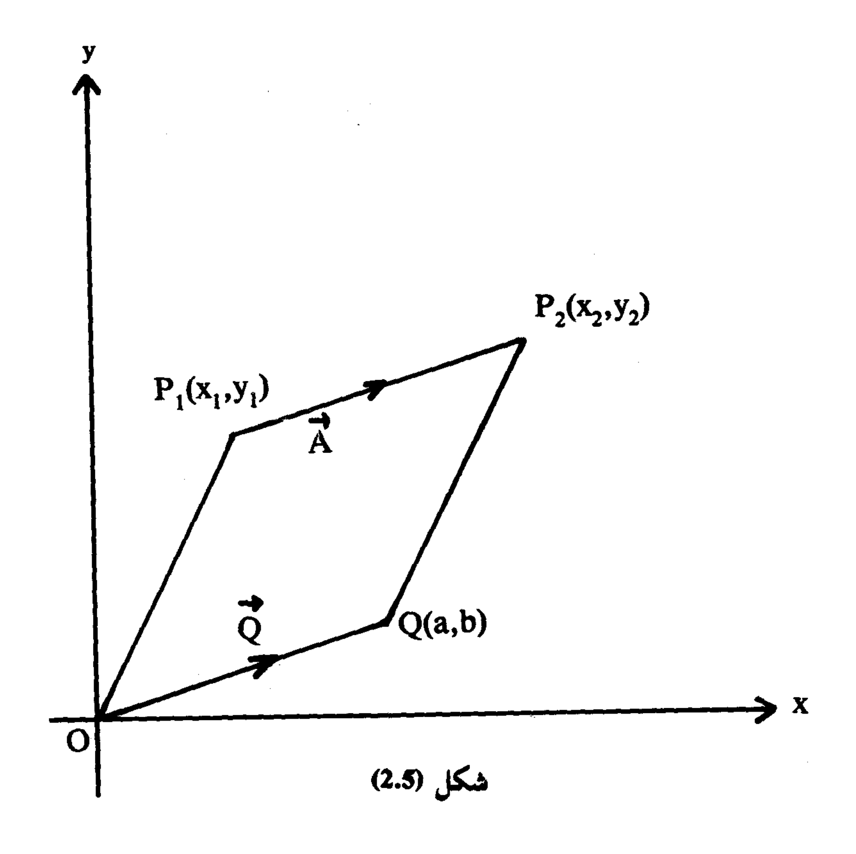
$$5\vec{A}=5(1,2)=(5.1, 5.2)=(5,10)$$

ومثال آخر على العمليات الجبرية على المتجهات في الفراغ :

اذا كان $\vec{B}=(2,-1,3), \vec{A}=(0,1,2)$ فأن

$$\begin{aligned}(1/2)\vec{A}-\vec{B} &= (1/2)(0,1,2) + (-1)(2,-1,3)\\ &=(0,1/2,1)+(-2,1,-3)\\ &=(-2,3/2,-2)\end{aligned}$$

تظهر في بعض الاحيان متجهات نقطة بدايتها ليست عند نقطة الاصل . لايجاد احداثيات متجه $\vec{A}$ نقطة بدايته هي $P_1(x_1,y_1)$ ونقطة نهايته $P_2(x_2,y_2)$ فإننا نكون متجهاً مساوياً نقطة بدايته عند نقطة الاصل . في شكل (2.5) ، $\vec{Q}=\overrightarrow{OQ}$ هو هذا المتجه . وان مركبات $\vec{A}=\overrightarrow{P_1P_2}$ هي الاحداثيات (a,b) للنقطة Q .



شكل (2.5)

من شكل (2.5) $\vec{OQ}+\vec{OP}_1=\vec{OP}_2$ او بدلالة الاحداثيات

$$(a,b)+(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

أو $(a+x_1,\ b+y_1)=(x_2,y_2)$

بمساواة المركبات المتناظرة والحل بالنسبة الى a,b نحصل على ان الاحداثيات للمتجه $\vec{A}=\overrightarrow{P_1P_2}$ تعطى كما يلي :

$$a=(x_2-x_1),\ b=(y_2-y_1)$$

وبالطريقة نفسها بالنسبة الى المتجهات في الفراغ .

مثال (1) :

المتجه الذي نقطة بدايته $P_1(3,4)$ ونقطة نهايته $P_2(-5,7)$ هو

$$\vec{A} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-5-3,7-4)$$
$$= (-8,3)$$

نستنتج مما تقدم ان عناصر المستوى والفراغ يمكن جمعها بحيث ان الجمع يحقق القوانين (1) ,(2) ,(3) ويمكن ضربها بأعداد حقيقية بحيث تتحقق القوانين , (4) (5), (6), (7), و(8) اعلاه .

هنالك مجموعات كثيرة لها الخصائص نفسها التي توفرت بالمستوى R^2 والفراغ R^3 وسوف نطلق على كل مجموعة تحقق القوانين اعلاه اسم فضاء متجهات . ولكي نضع التعريف العام سوف نقدم مفهوم فضاء المتجهات على اي حقل وذلك في البند القادم .

تمارين (1.2)

1 ــ ذا كان $\vec{A} = (1,2)$, $\vec{B} = (-1,4)$, $\vec{C} = (0,3)$.

(أ) جد المتجه $2\vec{A} - \sqrt{2}\vec{B} + (1/3)\vec{C}$.

(ب) جد اعداد حقيقية a,b تحقق المعادلة $\vec{C} = a\vec{A} + b\vec{B}$.

(ج) جد المتجه $\sqrt{3}\,\vec{A}-\vec{B}-\vec{C}$.

(د) ارسم المتجه $\vec{B}$ ثم ارسم المتجهين $2\vec{B}$, $-3\vec{B}$ ولاحظ علاقتهما بالمتجه $\vec{B}$.

(هـ) جد الأعداد الحقيقية x,y التي تحقق المعادلة

$$x\vec{A} + y\vec{C} = \vec{O}$$

حيث ان $\vec{O} = (o,o)$

(و) جد اعداد حقيقية x,y,z تحقق المعادلة (1) والشرط (2) أدناه .

$$x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = \vec{O} \text{.......(1)}$$

$$xyz \neq o \text{......(2)}$$

2 ــ جد متجهاً بدايته $P(1,2)$ ويكون بأتجاه المتجه $\vec{Q} = (-2,3)$.

3 ــ جد متجهاً بعكس اتجاه المتجه $P(2,1,5)$ ونقطة نهايته في $Q(-1,0,2)$.

4 ــ اوجد مجموع المتجهين $\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{PQ}$ عندما $P = (0,1,1)$
$S = (2,2,2),\ R = (1,0,-1),\ Q = (1,0,0)$

5 ــ لتكن $S = (1,-1),\ R = (-2,3),\ Q = (2,3),\ P = (1,1)$
جد $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS},\ \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RS}$.

6 ــ اكتب المتجه $P(2,7,1)$ كحاصل جمع متجهين احدهما يوازي المستوى xy . والاخر يوازي محور z .

(1-3) فضاء المتجهات ــ Vector Space-

لاحظنا في البند السابق امكانية تعريف عملية الجمع على كل من R^3 و R^2 ، وكذلك امكانية تعريف ضرب المتجهات في كل من R^3 و R^2 بأعداد حقيقية (عناصر تنتمي الى حقل الاعداد الحقيقية R) .

ان العمليتين اعلاه تحققان الشروط 1-8 السالفة الذكر .

في هذا البند سنعرف فضاء المتجهات على حقل F ليس بالضرورة ان يكون حقل الاعداد الحقيقية .

تعريف :

بفضاء متجهات على الحقل F نقصد مجموعة V عناصرها تسمى متجهات بمعية عمليتين . العملية الاولى هي عملية جمع المتجهات والتي تعين لكل زوج من المتجهات B,A في V متجه وحيد $A + B$ في V .

العملية الثانية هي عملية الضرب القياسي والتي تعين لكل متجه A في V ولكل عدد x في الحقل F متجه يرمز له بالرمز xA يسمى الضرب القياسي للعدد x بالمتجه A . العمليتان اعلاه يجب ان تحققان الشروط التالية :

1 ــ $A + B = B + A$ لكل زوج من المتجهات B,A (القانون الابدالي) .
2 ــ $(A + B) + C = A + (B + C)$ لكل ثلاثي من المتجهات A,B,C (القانون التجميعي) .

3 ــ يوجد متجه وحيد O يسمى المتجه الصفري يحقق $A + O = A$ لكل A في V .

4 ــ لكل متجه A في V يوجد متجه A- في V يحقق $A + (-A) = O$.

5 ــ $x(A + B) = xA + xB$ لكل زوج من المتجهات B,A ولكل عدد x في F .

6 ــ $(x + y)A = xA + yA$ لكل متجه A ولكل زوج من العناصر x,y في F .

7 ــ $(xy)A = x(yA)$ لكل متجه A ولكل زوج من العناصر x,y في F .

8 ــ $1.A = A$ لكل متجه A في V .

ان عناصر الحقل F تسمى اعداداً قياسية .

لقد لاحظنا ان كلاً من R^3 و R^2 (المستوى ، الفراغ) على التوالي يكون فضاء متجهات على حقل الاعداد الحقيقية . لكن هنالك فضاءات كثيرة ليست ذات طبيعة هندسية ولكن لها نفس البنية الرياضية والخصائص الجبرية كالفضاءات R^2 و R^3 .

ملاحظة :

لقد عرفنا فضاء المتجهات على اي حقل معين لكي يكون تناولنا للمادة شاملاً وعاماً لكننا سوف نركز في امثلتنا على حقلين فقط هما حقل الاعداد الحقيقية R وحقل الاعداد العقدية C . في بعض المسائل نتطرق الى حقل الاعداد النسبية .

امثلة متنوعة على فضاء المتجهات

1 ــ لتكن V مجموعة المصفوفات 2×2 عناصرها اعداد حقيقية .

اذا كان :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

فإن الجمع يعرف كالاتي :

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

ونعرف عملية الضرب القياسي كالاتي :

لكل عدد حقيقي x .

$$xA=\begin{bmatrix} xa_{11} & xa_{12} \\ xa_{21} & xa_{22} \end{bmatrix}$$

إن V فضاء متجهات على الحقل R بالنسبة للعمليتين اعلاه ويمكن تحقيق ذلك كالاتي :

الشرطان (1) ، (2) يتحققان بدون عناء وذلك لان جمع الاعداد الحقيقية يكون ابدالياً وتجميعياً .

بالنسبة للشرط (3) نأخذ

$$O=\begin{bmatrix} O & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

وبذلك يمكن تحقيق

$$A+O=A$$

لكل $A \in V$

بالنسبة للشرط (4)، لكل

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in V$$

يعرف A- بالاتي:

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$$

بذلك يكون لدينا : $A + (-A) = O$

الشروط الاخرى يمكن تحقيقها بسهولة .

2 ـــ بصورة عامة اذا كان F حقلاً فإن مجموعة المصفوفات $m \times n$ على الحقل F والتي يرمز لها بالرمز $M_{mn}(F)$ تكون فضاء متجهات على الحقل F بالنسبة لعملية جمع المصفوفات وعملية ضرب المصفوفات بأعداد .

3 ـــ اذا كان F حقلاً وكان n عدداً طبيعياً فإن المجموعة F^n تعرف بالآتي :

$$F^n = \{(x_1, \ldots\ldots, x_n) : x_i \in F\}$$

وتكون فضاء متجهات على الحقل F بالنسبة لعملية الجمع المعرفة بـ
$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.

وعملية الضرب القياسي المعروفة بـ

$$r(x_1, \ldots, x_n) = (rx_1, \ldots, rx_n)$$

ملاحظة :

الفضاء F^n في المثال اعلاه هو تعميم للفضائين R^2 و R^3 فعندما $F = R$ و $n = 2$ نحصل على الفضاء R^2 وعندما $F = R$ و $n = 3$ نحصل على الفضاء R^3 .

4 ــ لاي عدد طبيعي n ولاي حقل F نعرف المجموعة

$$P_n(F) = \{a_o + a_1x + \dots + a_nx^n : a_i \in F\}$$

اي ان $P_n(F)$ مجموعة متعددات الحدود بـ x ذات الدرجة التي لاتتعدى n ومعاملاتها عناصر في الحقل F . $P_n(F)$ تكون فضاء متجهات على الحقل F بالنسبة لعملية الجمع المعرفة بـ

$$(a_o + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_o + b_1x + \dots + b_nx^n) =$$

$$(a_o + b_o) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

وعملية الضرب القياسي المعروفة بـ

$$r(a_o + a_1x + \dots + a_nx^n) = (ra_o) + (ra_1)x + \dots + (ra_n)x^n$$

نشير هنا الى ان متعددة الحدود الصفرية

$$0 = o + ox + \dots + ox^n$$

تكون المتجه الصفري وإن نظير اي متجه $A = a_o + a_1x + \dots + a_nx^n$

يكون $-A = (-a_o) + (-a_1)x + \dots + (-a_n)x^n$

المثال التالي يوضح تعدد فضاءات المتجهات .

ە ــ لتكن (a,b) الفترة المفتوحة والتي تحتوي على جميع الاعداد الحقيقية x التي تحقق $a < x < b$

لتكن : $C(a,b) = \{f : f:(a,b) \to R$ ، f دالة مستمرة $\}$

اي ان C(a,b) تمثل مجموعة الدوال الحقيقية والمستمرة والمعرفة على الفترة المفتوحة (a,b) .

C(a,b) تكون فضاء متجهات على حقل الاعداد الحقيقية R بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب القياسي المعرفتين كما يلي :

$$f,g \in C(a,b),\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$r \in R,\ f \in C(a,b),\ (rf)(x) = rf(x)$$

بما ان جمع الدوال اعلاه معرف بواسطة جمع الاعداد الحقيقية فإن الشروط (1)، (2) تتحقق (لاحظ ان $f+g$ تكون دالة مستمرة وان rf تكون دالة مستمرة لأي $f,g \in C(a,b)$ ولأي عدد حقيقي r .

ان المتجه الصفري في $C(a,b)$ يكون الدالة $O:(a,b) \rightarrow R$

المعرفة بـ $O(x)=O$ لكل $x \in (a,b)$

كما ان نظير f هو $-f$ ويعرف كما يلي

$$(-f)(x)=-f(x)$$

بما ان

$$\begin{aligned}(O+f)(x) &= O(x)+f(x)\\ &= O+f(x)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

فيكون : $O+f=f$

لكل $f \in C(a,b)$ اي ان الشرط (3) يتحقق ولتحقيق الشرط (4) نلاحظ :

$$\begin{aligned}(f+(-f))(x) &= f(x)+(-f)(x)\\ &= f(x)-f(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

إذن : $f+(-f)=O$ لكل $f \in C(a,b)$. لتحقيق الشرط (5) نلاحظ :

$$\begin{aligned}(r(f+g))(x) &= r(f+g)(x)\\ &= r(f(x)+g(x))\\ &= rf(x)+rg(x)\\ &= (rf)(x)+(rg)(x)\\ &= (rf+rg)(x)\end{aligned}$$

فيكون :

$$r(f+g)=rf+rg$$

لكل $r \in R$ ولكل $f,g \in C(a,b)$. يمكن تحقيق الشروط (6), (7), (8) بصورة مماثلة .

ملاحظة :

ان نوع العملية مهم جداً في بناء فضاء المتجهات والمثال الاتي يوضح ذلك .

6 ـــ لتكن R^2 مجموعة نقاط المستوى . انظر الى العمليتين

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$r(x,y) = (rx,y)$$

ان R^2 لاتكون فضاء متجهات بالنسبة للعمليتين اعلاه . وذلك لانه عند اخذ :

$A = (1,1),\ r_2 = -2,\ r_1 = 1$ فإن

$$(r_1 + r_2)\,A = (1-2)\,A = (-1)\,(1,1) = (-1,1)$$
$$r_1A = (1,1),\ r_2A = (-2,1)$$
$$r_1A + r_2A = (1,1) + (-2,1) = (-1,2) = (-1,1)$$

اي ان $r_1A + r_2A \neq (r_1 + r_2)A$.

امثلة حسابية

1 ـــ في الفضاء $M_{23}(R)$ على الحقل R ، اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 7 & 1/2 \end{bmatrix}$$

فإحسب كل من : $2A,\ 3B,\ 2A + 5B$

الحل : بمراجعة مثال (2) يتضح أن

$$\sqrt{2}A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$3B = 3\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 7 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3\sqrt{3} \\ 6 & 21 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$2A + 5B = 2\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 7 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5\sqrt{3} \\ 10 & 35 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -5 & 2 + 5\sqrt{3} \\ 8 & 41 & 25/2 \end{pmatrix}$$

2 ــ في الفضاء C^3 على الحقل C حقل الاعداد العقدية، اذا كان

$$A = (i, 1+i, 5),\ B = (2+i,\ 1+3i, -i)$$

فإحسب كلاً من : $iA-(2+3i)B,\ (1+i)B,\ 2A$

بمراجعة مثال (3) يتضح ان :

$$2A = 2(i, 1+i, 5) = (2i, 2+2i, 10)$$

$$\begin{aligned}(1+i)B &= (1+i)\,(2+i,\ 1+3i, -i)\\ &= \big((1+i)\,(2+i)\,,\ (1+i)\,(1+3i),\ (1+i)\,(-i)\big)\\ &= (1+3i,\ -2+4i,\ 1-i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}iA-(2+3i)B &= (-1, -1+i, 5i)-(1+8i, -7+9i, 3-2i)\\ &= (-2-8i,\ 6-8i,\ -3+7i)\end{aligned}$$

3 ــ في الفضاء $P_2(R)$ على الحقل R، اذا كان

$$A = 2+3x-x^2,\ B = 5,\ C = \sqrt{2}x$$

فإحسب كلاً من : $A+B+3C,\ (1/2)A$

الحل : بمراجعة مثال (4) يتضح ان :

$$(1/2)A = (1/2)(2+3x-x^2) = 1+(3/2)x-(1/2)x^2$$

$$\begin{aligned}A+B+3C &= (2+3x-x^2)+(5)+3(\sqrt{2}x)\\ &= 7+3(1+\sqrt{2})x-x^2\end{aligned}$$

4 ــ في الفضاء $C(-1,3)$ على الحقل R، اذا كان

$$f:(-1,3) \rightarrow R,\ f(x) = 5x-2$$

$$g:(-1,3) \rightarrow R,\ g(x) = \operatorname{Sin}\pi x$$

فإحسب كلاً من : $2f-4g,\ (1/3)g,\ -f$

الحل : بمراجعة المثال (5) يتضح ان :

$$-f:(-1,3) \rightarrow R,\ (-f)(x) = -f(x)$$

اي ان :

$$(-f)(x) = -(5x-2)$$
$$= -5x+2$$

$$(1/3)\ g:(-1,3) \rightarrow R,\ ((1/3)g)(x) = (1/3)g(x)$$
$$((1/3)g)(x) = (1/3)\text{Sin}\,\pi x$$
$$(2f-4g)(x) = 2f(x)-4g(x)$$
$$= 2(5x-2)-4\text{Sin}\,\pi x$$
$$= 10x-4-4\text{Sin}\,\pi x$$

بعد استعراض امثلة متنوعة على مفهوم فضاء المتجهات وقبل الدخول في مفهوم الفضاء الجزئي سنذكر المبرهنة التالية .

مبرهنة (1.3.1) :

ليكن V فضاء متجهات على الحقل F. وليكن $A \in V$ متجهاً و $x \in F$ عدداً قياسياً فإن :

1 ـ $oA = O$

2 ـ $(-1)A = -A$

3 ـ $x.O = O$

البرهان :

1 ـ من خصائص فضاء المتجهات يكون لدينا :

$$oA = (o+o)A$$
$$= oA + oA$$

لكن $oA = oA + O$

إذن : $oA + O = oA + oA$

بإضافة (oA)- الى طرفي المعادلة اعلاه نحصل على

$$-(oA) + (oA + O) = -(oA) + (oA + oA)$$
$$(-(oA) + oA) + O = (-(oA) + oA) + oA$$
$$O + O = O + oA$$
$$O = oA$$

2 ــ

$$(1 + (-1))A = 1A + (-1)A$$
$$oA = A + (-1) A$$
$$O = A + (-1) A$$

وعليه يكون لدينا

$$(-1)A = -A$$

3 ــ

$$x(O + O) = xO + xO$$
$$xO = xO + xO$$
$$O + xO = xO + xO$$

باضافة (xO)- الى طرفي المعادلة اعلاه واجراء خطوات مماثلة لتلك التي اجريناها في برهان (1) نحصل على النتيجة المطلوبة .

(و . هـ . م .)

تماريـــن (1.3)

1 ــ اكتب الفضاء الذي ينتمي اليه كل من المتجهات التالية ووضح على اي حقل ممكن ان يكون .

$$(1,2,-1),\ (2,2+i,5),\ (1,1,-1,i),\ -6,\ 4+2i$$
$$(1/2,1),\ (\sqrt{2},1/3),\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\ i + 2x-(1+i)x^2$$

$f(x) = e^x,$ ، $f : (0,1) \to R$

2 ـ(أ) في الفضاء $M_{23}(C)$ على الحقل C ، جد ناتج كلاً مما يلي :

$$2i \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 1+i & -5 & 1/2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ i & i & -i \end{bmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 2-i & 7+i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

(ب) في الفضاء $P_3(R)$ على الحقل R ، جد ناتج مايلي :

$\sqrt{3}(2 + x - x^2) - 4x^3 + (2 - 7x + 4x^2)$.

(ج) جد قيم a,b التي تحقق المعادلة :

$$a \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 11/2 & 0 \end{bmatrix}$$

وذلك في الفضاء $M_2(R)$ على حقل الاعداد الحقيقية .

3 ـ ليكن F حقلاً و S مجموعة غير خالية . لتكن V مجموعة كل الدوال من S الى F . نعرف جمع اي دالتين $f,g \in V$ على انه الدالة $f + g \in V$ المعرفة كما يلي : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. ونعرف حاصل ضرب عدد قياسي $r \in F$ بالدالة $f \in V$ على انه الدالة rf المعرفة كما يلي :

$(rf)(x) = rf(x)$

إثبت ان V تكون فضاء متجهات على الحقل F وذلك بالنسبة للعمليتين اعلاه .

4 ــ لتكن $V = R^+$ مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة. نعرف الجمع والضرب بأعداد قياسية من الحقل R كما يلي :

$$x + y = xy$$
$$rx = x^r$$

وذلك لاي $x,y \in V$ ولاي عدد حقيقي r.

إثبت ان V فضاء متجهات بالنسبة للعمليتين اعلاه.

5 ــ اثبت ان مجموعة حلول نظام المعادلات المتجانسة :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

تكون فضاء متجهات على الحقل F علماً بأن $a_{ij} \in F$ لكل i,j.

6 ــ لتكن $V = R^2$. نعرف عمليتي جمع وضرب قياسي كالاتي :

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (3y_1 + 3y_2, -x_1 - x_2)$$
$$r(x,y) = (3ry, -rx)$$

هل ان V فضاء متجهات على الحقل R؟.

7 ــ لتكن $V = R^2$. برهن على ان V ليست فضاء متجهات على R بالنسبة الى كل من عمليتي الجمع والضرب القياسي التالية

(i) $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$؛ $r(x,y) = (x, 2ry)$

(ii) $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1, y_1)$؛ $r(x,y) = (rx, ry)$

(iii) $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $r(x,y) = (r^2x, r^2y)$.

8 ــ برهن على ان C^n يكون فضاء متجهات على حقل الاعداد الحقيقية ايضاً، وذلك لاي n.

9 ــ اثبت ان المعادلة :

$$x(1 + i, 1 - i) + y(2, 5 + 2i) = (7 + i, 21 + 9i)$$

قابلة للحل في الفضاء C^2 على الحقل C ، لكن غير قابلة للحل في الفضاء C^2 على الحقل R .

(1.4) الفضاءات الجزئية Subspaces

اذا كان V فضاء متجهات على الحقل F فإن بعض المجموعات الجزئية من الفضاء V تكون بدورها فضاءات متجهات بالنسبة الى عمليتي جمع المتجهات والضرب في اعداد قياسية المعرفتين على V. سوف ندرس في هذا البند مثل هذه المجموعات الجزئية بالتفصيل.

تعريف :

اي مجموعة جزئية M من فضاء متجهات V على الحقل F تسمى فضاءاً جزئياً من V اذا كانت M فضاء متجهات بالنسبة الى عمليتي الجمع والضرب بأعداد قياسية المعرفتين على V .

لو رجعنا الى تعريف فضاء المتجهات لعرفنا مايلي :

حتى تكون المجموعة V فضاء متجهات على الحقل F يجب ان يعرف عملية جمع على V ، اي انه لاي زوج من العناصر A,B في V يجب ان يكون حاصل الجمع $A+B$ عنصراً في V كذلك فأنه يجب ان تعرف عملية ضرب قياسي، اي لاي عنصر A في V ولاي عدد x في الحقل F يجب ان يكون حاصل الضرب القياسي $A \times$ عنصراً في V. بالاضافة الى الشروط الثمانية الواردة في التعريف .

الان لو اعطيت لنا مجموعة جزيئة M من فضاء متجهات V على الحقل F وطلب منا ان نحقق فيما اذا كانت M فضاءاً جزئياً من V فيجب علينا ان نحقق مايلي :

(أ) لاي زوج من العناصر A, B في M يجب ان يكون $A+B$ عنصراً في M (عندئذ نقول بأن M مغلقة تحت عملية الجمع) .

(ب) لاي عنصر A في M ولاي عدد قياسي x في F يجب ان يكون xA عنصراً في M (عندئذ نقول بأن M مغلقة تحت عملية الضرب القياسي).

هذا بالاضافة الى تحقيق الشروط من (1) الى (8) الواردة في تعريف فضاء المتجهات .

على الرغم من ذلك ، اذا كانت M مجموعة جزيئة من مجموعة اكبر V التي تكون بالفعل فضاء متجهات ، فإن بعض الشروط لاتحتاج الى تحقيق للفضاء M لانها تورث من V . فمثلاً لاتوجد حاجة للتأكد من ان $A+B= B+A$ (الشرط (1)) للفضاء M لانها تتحقق لجميع المتجهات في V ومن ثم جميع المتجهات في M .

بهذا تكون بقية الشروط الموروثة من V الى M هي (2)، (5)، (6)، (7)، (8) . اما الشرطان (3)، (4) فيمكن استنتاجهما من الشرطين (أ)، (ب) كما يوضحهما برهان المبرهنة الاتية :

مبرهنة (1-4-1) :

اذا كانت M مجموعة جزئية غير خالية من فضاء المتجهات V على الحقل F فإن M تكون فضاء متجهات اذا وفقط اذا تحققت الشروط التالية :

(أ) اذا كان A,B متجهين في M فإن $A+B$ ايضاً في M .

(ب) اذا كان x اي عدد قياسي وكان A اي متجه في M فإن xA ايضاً في M .

البرهـان :

اذا كان M فضاءاً جزئياً فإن جميع الشروط تتحقق وبالاخص الشرطين (أ)، (ب) اعلاه .

بالعكس نفرض تحقق الشرطين (أ)، (ب) اعلاه . حتى يكون M

فضاءاً جزئياً نحتاج فقط الى ان نحقق بقية الشروط وكما وضحنا اعلاه نحتاج فقط الى ان نحقق الشرطين (3) ، (4) لان بقية الشروط تورث من V الى M .

اعتبر A اي متجه في M . من الشرط (ب) اعلاه يكون xA في M لاي عدد قياسي x . بوضع $x = o$ ينتج ان $oA = O$ موجود في M ، وبوضع $x = -1$ ينتج ان $(-1) A = - A$ موجود في M .

(و . هـ . م .)

لكل فضاء متجهات V يوجد على الاقل فضاءان جزيئان . يكون V نفسه فضاءاً جزئياً والمجموعة$\{o\}$المكونة فقط من المتجه الصفري تكون فضاءاً جزئياً يسمى بالفضاء الجزئي الصفري . الامثلة الآتية تتناول حالات للفضاءات الجزئية اقل بداهة من الفضائين الجزئيين اعلاه .

مثال (1) :

برهن على ان المجموعة : $M = \{(x,y): y = 2x\}$ تكون فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات R^2 على الحقل R .

الحل : خذ $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ اي متجهين في M و k اي عدد قياسي(k عدد حقيقي)، فيكون : $kA = (kx_1, ky_1)$, $A + B = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

الان :

$$y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2$$
$$= 2\,(x_1 + x_2)$$
$$ky_1 = k\,(2x_1)$$
$$= 2(kx_1)$$

لذلك فإن : $A + B \in M, kA \in M$.

لقد برهنا على ان M مجموعة مغلقة تحت عمليتي الجمع والضرب القياسي فبذلك تكون M فضاءاً جزئياً من R^2 .

مثال (2) :

برهن على ان المجموعة :

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} o & a \\ b & o \end{bmatrix} \quad : \text{اعداد حقيقية } b, a \right\}$$

تكون فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات $M_{22}(R)$ على الحقل R (فضاء المصفوفات 2×2 التي عناصرها اعداد حقيقية) .

الحل : خذ $A = \begin{bmatrix} o & a_1 \\ b_1 & o \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} o & a_2 \\ b_2 & o \end{bmatrix}$

اي متجهين في M و x اي عدد حقيقي ، فيكون :

$$A + B = \begin{bmatrix} o & a_1 \\ b_1 & o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o & a_2 \\ b_2 & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & o \end{bmatrix}$$

$$xA = x \begin{bmatrix} o & a_1 \\ b_1 & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & xa_1 \\ xb_1 & o \end{bmatrix}$$

وعليه يكون $A + B \in M$ و $xA \in M$ بذلك تكون M فضاءً جزئياً .

مثال (3) :

برهن على ان المجموعة :

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 3x_4 = o \text{ و } x_2 = x_3\}$$

تكون فضاءً جزئياً من فضاء المتجهات R^4 على الحقل R .

الحل : خذ $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ، $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$

اي متجهين في M و k اي عدد حقيقي .

نستنتج من ذلك ان :

$$a_1 + 3a_4 = o, \ a_2 = a_3$$
$$b_1 + 3b_4 = o, \ b_2 = b_3$$

الان

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$$
$$(a_1 + b_1) + 3(a_4 + b_4) = (a_1 + 3a_4) + (b_1 + 3b_4)$$
$$= o + o$$
$$= o$$
$$a_2 + b_2 = a_3 + b_3$$

وعليه يكون

$$A + B \in M$$
$$kA = (ka_1, ka_2, ka_3, ka_4)$$
$$ka_1 + 3ka_4 = k(a_1 + 3a_4) = k.o = o$$
$$ka_2 = ka_3$$

وعليه يكون $kA \in M$

بذلك يكون M فضاءاً جزئياً من الفضاء R^4 على الحقل R

مثال (4) :

برهن على ان المجموعة :

$$M = \{a + bx + cx^2 : a + 2b - c = 1\}$$

ليست فضاءاً جزئياً من الفضاء $P_2(R)$ على الحقل R .

الحل : لو اخذنا : $A = a_1 + b_1x + c_1x^2$

$B = a_2 + b_2x + c_2x^2$ اي متجهين في M .

لاستنتجنا بأن $a_2 + 2b_2 - c_2 = 1 \; , \; a_1 + 2b_1 - c_1 = 1$

لكن $A + B = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2$

نلاحظ ان

$$(a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) = (a_1 + 2b_1 - c_1) + (a_2 + 2b_2 - c_2) = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

من هذا نستنتج على ان $A + B \notin M$

اي ان M مجموعة ليست مغلقة تحت عملية الجمع . وبذلك لايمكن لـ M ان تكون فضاءاً جزئياً .

مثال (5) :

فيما يلي مجموعات جزئية من فضاء الدوال $C(1,5)$ (راجع مثال (5) في البند (1.3)) . اختبر كل مجموعة من حيث كونها فضاءً جزئياً .

$M_1 = \{f: 3f(4) = f(2)\}$

$M_2 = \{f:$ لجميع قيم x في الفترة $(1,5)$ $f(x) > 0\}$

$M_3 = \{f:$ لجميع قيم x في الفترة $(1,5)$ $f(x) \leq 0\}$

$M_4 = \{f:$ لجميع قيم x في الفترة $(1,5)$ $f(x) = f(6-x)\}$

الحل : إختبار M_1 :

خذ f ، g اي متجهين في M_1 وخذ k اي عدد حقيقي :

يكون عندنا : $3f(4) = f(2)$ ، $3g(4) = g(2)$.

الآن :

$$\begin{aligned} 3(f+g)(4) &= 3(f(4) + g(4)) \\ &= 3f(4) + 3g(4) \\ &= f(2) + g(2) \\ &= (f+g)(2) \end{aligned}$$

بذلك يكون : $f+g \in M_1$

$$3(kf)(4) = 3\,(kf(4))$$
$$= k(3f(4))$$
$$= k\,(f\,(2))$$
$$= (kf)\,(2)$$

بذلك يكون : $kf \in M_1$

وعليه فإن M_1 فضاء جزئي من $C\,(1,5)$.

اختبار M_2 . ان الشرط الموضوع على الدوال التي تنتمي الى M_2 هو ان هذه الدوال تكون موجبة لجميع قيم المجال $(1,5)$. انه لمن الواضح ان حاصل جمع اي دالتين موجبتين يكون دالة موجبة وبذلك تكون M_2 مغلقة تحت عملية الجمع. لكن M_2 ليست مغلقة تحت عملية الضرب القياسي لانه لو كان k عدداً حقيقياً سالباً فإنه لاي $f \in M_2$ يكون لدينا :

لاي $(1,5)$ $(kf)(x) = kf(x) < o,\ x \in$

(لأن $f(x) > o$ و $k < o$)

بذلك نستنتج على ان M_2 ليست فضاءاً جزئياً من فضاء الدوال $C(1,5)$ على الحقل R .

إختبار M_3 : M_3 ليست فضاءاً جزئياً وذلك لانها غير مغلقة تحت عملية الضرب القياسي والتوضيح مماثل الى حالة M_2 .

اختبار M_4 : خذ f ، g اي متجهين في M_4 وخذ k اي عدد حقيقي .

يكون عندنا : $g(x) = g(6\text{-}x)\ ,\ f\,(x) = f(6\text{-}x)$

$$(f+g)\,(x) = f(x) + g(x)$$
$$= f(6\text{-}x) + g\,(6\text{-}x)$$
$$= (f+g)\,(6\text{-}x)$$

بذلك يكون $f+g \in M_4$

$$(kf)(X) = kf(x) = kf(6-x)$$
$$= (kf)(6-x)$$

بذلك يكون $kf \in M_4$

نستنتج من هذا على ان M_4 تكون فضاءاً جزئياً من الفضاء $C(1,5)$ على الحقل R .

تماريـن (1.4)

1 ــ حدد اي مما يلي يكون فضاءاً جزئياً من R^n, $n \geqslant 3$.

(أ) جميع المتجهات $A=(x_1,\ldots,xn)$ ، حيث $x_1 > o$.
(ب) جميع المتجهات $A=(x_1,\ldots,xn)$ ، حيث $x_1+5x_2=x_3$.
(ج) جميع المتجهات $A=(x_1,\ldots,xn)$ ، حيث $x_1x_n=o$
(د) جميع المتجهات $A=(x_1,..,xn)$ ، حيث $x_2=2x_1^3$.

2 ــ حدد اي مما يلي يكون فضاءاً جزئياً من $M_{22}(R)$.

(أ) جميع المصفوفات $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، حيث a,b,c,d اعداد صحيحة .

(ب) جميع المصفوفات $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، حيث $a-b+2c=O$.

(ج) جميع المصفوفات A ذات الدرجة 2×2 بحيث يكون $A^T=A$.
(د) جميع المصفوفات A ذات الدرجة 2×2 بحيث يكون $\det(A) = o$.

3 ــ حدد اي ممايلي يكون فضاءاً جزئياً من C^3 على الحقل C .

(أ) جميع المتجهات $A=(z_1,z_2,z_3)$ ، حيث $z_1-z_2+z_3=o$.
(ب) جميع المتجهات $A=(z_1,z_2,z_3)$ ، حيث $z_1=5$.

(ج) جميع المتجهات $A=(z_1,z_2,z_3)$ ، حيث $z_1=\bar{z}_2$.
(د) جميع المتجهات $A=(z_1,z_2,z_3)$ حيث $|z_3|=4$.

4 ــ حدد اي مما يلي يكون فضاءاً من $P_3(R)$.

(أ) جميع متعدادت الحدود $a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ ، حيث $a_2=o$.
(ب) جميع متعددات الحدود $a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ ، حيث $a_o-a_1+a_3=O$.
(ج) جميع متعددات الحدود $a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ ، حيث $a_1+a_2=1$.

5 ــ حدد اي مما يلي فضاءاً جزئياً من فضاء الدوال $C[0,1]$ المعرفة على الفترة المغلقة $[0.1]$.

(أ) جميع الدوال f التي تحقق $f(1)=o$.
(ب) جميع الدوال f التي تحقق $f(x)\leq o$ لكل $x\in[0,1]$.
(ج) جميع الدوال f التي تحقق $f(1/2)=(f(o)+f(3/4))/2$.
(د) جميع الدوال الثابتة .
(هـ) جميع الدوال f التي يمكن كتابتها $f(x)=a+bx$ حيث a,b اعداداً حقيقية .

(1-5) جبر الفضاءات الجزئية Algebra of Subspaces

اذا كان كل من M_1 و M_2 فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V على الحقل F فإنه بالامكان تكوين المجموعتين

$$M_1\cup M_2=\{A\in V: A\in M_1 \text{ أو } A\in M_2\}$$

$$M_1\cap M_2=\{A\in V: A\in M_1 \text{ و } A\in M_2\}$$

سنبين في هذا البند ان الاتحاد $M_1\cup M_2$ لايكون دائماً فضاءاً جزئياً من V ، في حين ان التقاطع $M_1\cap M_2$ يكون دائماً فضاءاً جزئياً ثم نعطي امثلة على كيفية حساب تقاطع فضاءين جزئين . سنتطرق كذلك الى جمع الفضاءات الجزئية وخصائصها .

مبرهنه (1.5.1) :

اذا كان كل من M_1 و M_2 فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V على الحقل F فإن.

(أ) $M_1 \cap M_2$ يكون فضاءاً جزئياً .

(ب) $M_1 \cup M_2$ يكون فضاءاً جزئياً اذا وفقط اذا كانت $M_1 \subset M_2$ أو $M_2 \subset M_1$.

البرهان : (أ)

خذ A,B اي متجهين في $M_1 \cap M_2$ وخذ k اي عدد قياسي في F .

يجب البرهنة على ان $A+B \in M_1 \cap M_2$ و $kA \in M_1 \cap M_2$.

من الفرض نستنتج على ان $A \in M_1$ و $B \in M_1$ و $A \in M_2$ و $B \in M_2$.

بما ان كل من M_1 ، M_2 فضاءاً جزئياً فنحصل على :

$A+B \in M_1$ و $A+B \in M_2$

و $kA \in M_1$ و $kA \in M_2$

بذلك يكون لدينا $A+B \in M_1 \cap M_2$

$kA \in M_1 \cap M_2$

(ب) إفرض أن $M_1 U M_2$ فضاء جزئي من V .

لو كان $M_1 \not\subset M_2$ و $M_2 \not\subset M_1$ لاستنتجنا انه :

يوجد $A \in M_1$ و $A \notin M_2$

ويوجد $B \in M_2$ و $B \notin M_1$

على اي حال يكون لدينا

$A \in M_1 \cup M_2$ و $B \in M_1 \cup M_2$

بما ان $M_1 U M_2$ فضاء جزئي نستنتج :ـــ

$A+B=C \in M_1 U M_2$

الان : $A = C - B \ldots (1)$

$B = C - A \ldots (2)$

فإذا كان $C \in M_1$ فإن (2) تعطي $B \in M_1$ (وذلك لان $A \in M_1$ وكون M_1 فضاءاً جزئياً ينتج ان $-A \in M_1$ - وبذلك يكون $B = C - A = C + (-A) \in M_1$).
وهذا غير ممكن.اما اذا كان $C \in M_2$ فإن (1) تعطي $A \in M_2$ وهذا غير ممكن .

اذن : $C \notin M_1$ و $C \notin M_2$

اي ان : $C \notin M_1 \cup M_2$

وهذا تناقص

اذن $M_1 \subset M_2$ أو $M_2 \subset M_1$

على العكس لو افترضنا أن

$M_1 \subset M_2$ أو $M_2 \subset M_1$

فإن $M_1 \cup M_2 = M_2$ أو $M_1 \cup M_2 = M_1$

وبأي حالة يكون $M_1 \cup M_2$ فضاءاً جزئياً .

(و . هـ . م .)

فيما يلي نعطي مثالاً يوضح ان $M_1 \cup M_2$ لايكون فضاءاً جزئياً بصورة عامة .

مثال (1) :

في الفضاء R^2 على الحقل R ، كل من

$M_1 = \{(x,y): x + 2y = 0\}$

$M_2 = \{(x,y): 5x + y = 0\}$

يكون فضاءاً جزئياً من R^2 .

لاحظ ان $A = (2,-1) \in M_1$ و $B = (-1,5) \in M_2$

اي : $A \in M_1 \cup M_2$ و $B \in M_1 \cup M_2$

$A + B = (1,4)$

نلاحظ ان $A + B \notin M_1$ و $A + B \notin M_2$

بذلك يكون $A + B \notin M_1 \cup M_2$

اي ان $M_1 U M_2$ ليست مجموعة مغلقة تحت عملية الجمع،من هذا نستنتج على ان $M_1 U M_2$ ليست فضاءاً جزئياً .

مثال (2) :

احسب تقاطع الفضاءين الجزئين :ـــ

$M_1 = \{(x, y, z) : 2x - y + 3z = o\}$
$M_2 = \{(x, y, z) : x + y - z = o\}$

وذلك في الفضاء R^3 على الحقل R .

الحل : لنفرض ان المتجه $A = (x, y, z)$ ينتمي الى التقاطع $M_1 \cap M_2$.

يكون لدينا عندئذ معادلتين :

$2x - y + 3z = o \ldots\ldots(1)$
$x + y - z = o \ldots\ldots(2)$

بضرب المعادلة (2) في -2 وجمعها مع المعادلة (1) نحصل على :
$-3y + 5z = o \ldots\ldots(3)$

اي ان : $y = (5/3)\, z$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$x = (-2/3)z$

بذلك يكون حل المعادلتين اعلاه كالاتي :

$x = (-2/3)z, \; y = (5/3)z, \; z = z$

اذا يمكن وصف التقاطع كالاتي :

$M_1 \cap M_2 = \{(x, y, z) : x = (-2/3)z, \; y = (5/3)z, \; z = z \}$

مثال (3) :

في الفضاء $P_2(R)$ على الحقل R ، احسب التقاطع $M \cap N$ اذا علمت بأن :

$$M = \{a + bx + cx^2 : a + 2b - c = o\}$$
$$N = \{a + bx + cx^2 : b = o, a + 3c = o\}$$

الحل : افرض ان المتجه $A = a + bx + cx^2$ ينتمي الى التقاطع $M \cap N$.

يكون لدينا عندئذ ثلاث معادلات :

$$a + 2b - c = o \;...(1)$$
$$b = o \;....(2)$$
$$a + 3c = o \;.....(3)$$

عند حل المعادلات اعلاه نحصل على : $a = b = c = o$،نرى من هذا ان التقاطع يحتوي على متجه واحد فقط هو $A = o + ox + o\,x^2 = o$ اي متعددة الحدود الصفرية . اذا يمكن وصف التقاطع كالاتي :

$$M \cap N = \{o\}$$

جمع الفضاءات الجزئية :

اذا كان كل من M و N فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V على الحقل F فإنه بلامكان ان نكون المجموعة الاتية :

$$M + N = \{A + B : A \in M, B \in N\}$$

اي ان $M + N$ يحتوي على جميع المتجهات في V التي يمكن كتابتها كحاصل جمع متجهين أحدهما في M والآخر في N. المبرهنة ادناه توضح ان المجموعة الجزئية $M + N$ تكون فضاءاً جزئياً يحتوي على كل من M و N .

مبرهنة (1.5.2) :

اذا كان V فضاء متجهات على حقل F وكان كل من M و N ، فضاءاً جزئياً من V فإن M + N يكون فضاءاً جزئياً من V يحتوي على كل من M و N .

البرهان :

خذ $A_1 \in M+N$ و $A_2 \in M+N$ اي متجهين في M + N و $x \in F$ اي عدد قياسي . يجب ان نحقق :

(أ) $A_1 + A_2 \in M+N$.

(ب) $xA_1 \in M+N$

بما ان $A_1 \in M+N$ و $A_2 \in M+N$. اذاً يوجد $B_1 \in M$ و $C_1 \in N$ بحيث . $A_1 = B_1 + C_1$.

كذلك يوجد $B_2 \in M$ و $C_2 \in N$ بحيث $A_2 = B_2 + C_2$

$$A_1 + A_2 = (B_1 + C_1) + (B_2 + C_2)$$
$$= (B_1 + B_2) + (C_1 + C_2)$$

نلاحظ ان $B_1 + B_2 \in M$ و $C_1 + C_2 \in N$ وذلك لان كلاً من M و N فضاء جزئي من V .

من تعريف M + N ينتج ان $A_1 + A_2 \in M+N$

$$xA_1 = x(B_1 + C_1)$$
$$= xB_1 + xC_1$$

$xB_1 \in M$ و $xC_1 \in N$ وذلك لان كلاً من M و N فضاء جزئي من V .

إذا : $xA_1 \in M+N$

الان اذا كان $A \in M$ فأنه بالامكان كتابة A على الشكل :

$$A = A + O$$

اي ان A يمكن كتابته كحاصل جمع متجهين احدهما $A \in M$ والاخر $O \in N$

بذلك يكون $M \subset M+N$.بنفس الطريقة فإن كل متجه $B \in N$ يمكن كتابته على الشكل :

$$B = O + B$$

اي ان $B \in N$ تنتج $B \in M+N$

بذلك يكون : $N \subset M+N$

نرى من هذا ان $M+N$ فضاء جزئي من V يحتوي على كل من M و N .

(و . هـ . م .)

نطلق على الفضاء الجزئي $M+N$ إسم مجموع الفضاءين M و N او جمع الفضاءين M و N .

الان نتناول بعض الامثلة التي توضح فكرة جمع الفضاءات الجزئية .

مثال (4) :

في الفضاء R^2 على الحقل R ، اذا كان

$$M = \{(x,o) : x \in R\}$$
$$N = \{(o,y) : y \in R\}$$

فإحسب : $M+N$

الحل : ليكن A متجهاً في $M+N$.من التعريف ، يوجد متجه $B=(x,c)$ في M ومتجه اخر $C=(o,y)$ في N بحيث :

$$A = B + C$$

اي ان $A = (x,y)$

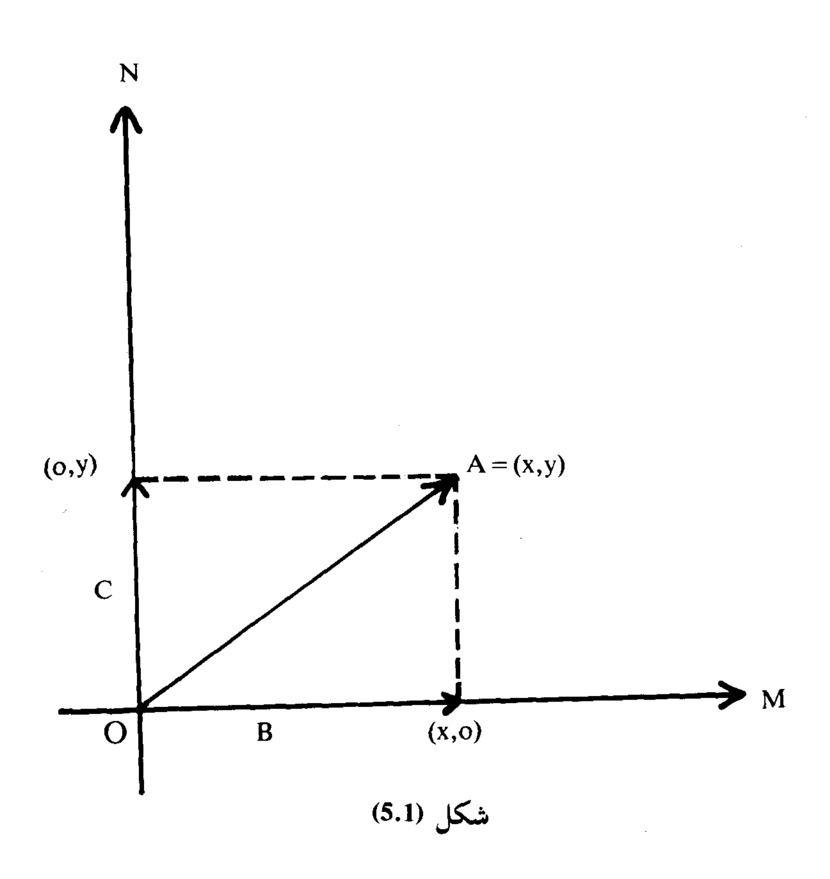
اذاً $M + N = \{(x,y) : x,y \in R\}$

اي ان $M + N = R^2$

يمكن توضيح المثال هندسياً كالاتي :

الفضاء الجزئي M يمثل محور السينات في المستوى R^2

الفضاء الجزئي N يمثل محور الصادات في المستوى R^2
حاصل جمع M و N اي الفضاء الجزئي $M + N$
يساوي كل المستوى R^2 . انظر الشكل (5.1) أدناه



شكل (5.1)

مثال (5) :

في الفضاء R^4 على الحقل R ، اذا كان :

$M = \{(o,y,z,o): y,z \in R\}$
$N = \{x,o,z,w): x,z,w \in R\}$

فإحسب $M + N$

الحل : خذ $A = (o, y_1, z_1, o)$ اي متجه في M وخذ $B = (x_2, o, z_2, w_2)$ اي متجه في N .

$$A + B = (x_2, y_1, z_1 + z_2, w_2)$$

اذن $M + N = \{(x, y, z, w): x, y, w \in R\}$

وذلك لان اي متجه في $A = (x, y, z, w) \in R^4$

يمكن كتابته كحاصل جمع متجهين احدهما في M والاخر في N كالاتي :

$$A = (o, y, z/2, o) + (x, o, z/2, w)$$

نود هنا ان نبين ان المتجهات في R^4 يمكن ان نكتب بطرق مختلفة كحاصل جمع متجهات في M ومتجهات في N فمثلاً :

$$\begin{aligned}(1,2,3,10) &= (0,2,3,0) + (1,0,0,10)\\ &= (0,3/2,0) + (1,0,3/2,10)\\ &= (0,2,2,0) + (1,0,1,10)\end{aligned}$$

في كل مرة كتبنا المتجه (1,2,3,10) كحاصل جمع متجهين الاول في M والاخر في N لكن بطرق مختلفة .

في بعض الاحيان لايمكننا عمل ذلك ، ولغرض التمييز نورد التعريف الاتي :

تعريف :

نقول عن فضاء المتجهات V انه جمع مباشر لفضائيه الجزئيين M و N ويرمز له :

$$V = M \oplus N$$

اذا كان كل متجه $A \in V$ يمكن ان يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط على النحو $A = B + C$ حيث $C \in N, B \in M$. لو نظرنا الى الامثلة السابقة لرأينا ان المثال (4) يعطي $R^2 = M \oplus N$

اما المثال (5) فيوضح ان

$R^4 = M + N$ لكن $R^4 \neq M \oplus N$

هذا يحفزنا على التفكير بضرورة وجود علاقة ما او شرط مايجعل من الجمع الاعتيادي جمعاً مباشراً. المبرهنة ادناه توضح ذلك.

مبرهنة (1.5.3) :

يكون الفضاء V جمعاً مباشراً لفضائية الجزئيين M و N اذا وفقط اذا كان :

(أ) $V = M + N$

(ب) $M \cap N = \{O\}$

البرهان :

افرض ان V يكون جمعاً مباشراً للفضاءين الجزئيين M و N اي ان $V = M \oplus N$

اذاً كل متجه A في V يمكن ان يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط على النحو $A = B + C$ حيث $B \in M$ و $C \in N$

هذا يعني ان $V = M + N$

الان لو كان $M \cap N \neq \{O\}$ لوجد متجه $A \in M \cap N$ و $A \neq O$

اي $A \in M$ و $A \in N$ و $A \neq O$

عندئذ يمكن كتابة A بأكثر من طريقة واحدة فمثلاً :

$A = A + O$ (لان $A \in M$ و $O \in N$)

$A = O + A$ (لان $A \in N$ و $O \in M$)

وهذا يناقص كون V جمعاً مباشراً.

اذاً $V = M + N$ و $M \cap N = \{O\}$. على العكس لو كان

$V = M + N$ و $M \cap N = \{O\}$

خذ اي متجه $A \in V$ وافرض انه بالامكان كتابته بطريقتين مختلفتين

$A = B_1 + C_1$ و $A = B_2 + C_2$

$B_1, B_2 \in M$ و $C_1, C_2 \in N$

$$B_1 + C_1 = B_2 + C_2$$

$$B_1 - B_2 = C_2 - C_1$$

بما ان كل من N و M فضاء جزئي فيكون :

$B_1 - B_2 \in M$ و $C_2 - C_1 \in N$

لكن المعادلة : $B_1 - B_2 = C_2 - C_1$

تنتج : $B_1 - B_2 \in N$ لانه يساوي $C_2 - C_1$ المنتمي الى N ، $C_2 - C_1 \in M$ لانه يساوي $B_1 - B_2$ المنتمي الى M.نستنتج من هذا ان

$$C_2 - C_1 \in M \cap N, \; B_1 - B_2 \in M \cap N$$

لكن $M \cap N = \{0\}$

وعليه يكونا لدينا $B_1 - B_2 = 0$ و $C_2 - C_1 = 0$

اي أن $B_1 = B_2$ و $C_1 = C_2$

من هذا ينتج ان A قد كتب بطريقة واحدة وواحدة فقط .

(و . هـ . م .)

تمارين (1.5)

1 ـــ اذا كان $N = \{(x, y, z) : y + z = 0\}$ و $M = \{(x_1, y, z) : x = 0\}$ فضائين جزئيين من R^3 . جد الفضائين الجزئيين $M + N, M \cap N$.

2 ـــ اذا كان $M = \{(x, y, z, w) : x + 2z - w = 0\}$

$N = \{(x, y, z, w) : x + y + z + w = 0\}$

فضائين جزئيين من R^4 . جد الفضائين الجزئيين $M + N, M \cap N$.

3 ــ اذا كان $N=\{(y,y): y \in R\}$ و $M=\{(2x,x): x\in R\}$ فضائين جزئيين من R^2 ، فبرهن على ان $R^2 = M \oplus N$.

4 ــ اذا كان

$$M=\{(z_1,z_2,z_3): z_2 = z_1 - z_3\}$$
$$N=\{(z_1,z_2,z_3): 2z_1 - z_2 = 0\}$$

فضائين جزئيين من الفضاء C^3 على الحقل C ، فجد $M \cap N$ ثم برهن على ان $C^3 = M + N$ واوُجد متجهاً في C^3 واكتبه بثلاث طرق مختلفة كحاصل جمع متجه في M واخر في N .

5 ــ اذا كان

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & o \\ b & c \end{pmatrix} , a + c = b \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix} : a = 3c \right\}$$

فضائين جزئيين من $M_2(R)$ فجد $M \cap N$ و $M + N$.

6 ــ **ليكن V فضاء المتجهات المتكون من المصفوفات المربعة $n \times n$ على حقل الاعداد الحقيقية وليكن:**

$$M=\{A \in V: A^T = A\}$$
$$N=\{A \in V: A^T = -A\}$$

حيث ان A^T تمثل مدورة المصفوفة A . برهن على ان كلاً من M و N يكون فضاءاً جزئياً من V بحيث $V = M \oplus N$.

7 ــ اذا كان M,N,L فضاءات جزئية من فضاء المتجهات V على الحقل F فبرهن على ان

$$(M \cap N) + (M \cap L) \subset M \cap (N + L)$$

جد فضاءات جزئية من R^2 لاتصلح من اجلها هذه المساواة .

8 ــ لتكن M,N,L الفضاءات الجزئية التالية من R^3 :

$N=\{(x,y,z): \quad x=z\}$ و $L=\{(o,o,z):z\in R\}$ و

$M=\{(x,y,z):x+y+z=o\}$. برهن مايلي :

(i) $R^3=M+N$ ، (ii) $R^3=M+L$ ، (iii) $R^3=N+L$ متى يكون الجمع مباشراً .

9 ــ اذا كانت M,N,N' فضاءات جزئية من فضاء متجهات V على الحقل F بحيث ان : $M+N=M+N'$ و $M\cap N=M\cap N'$ و $N\subset N'$.

برهن ان $N=N'$.

(1.6) التركيب الخطي Linear Combination

سنبحث في هذا البند المسألة التالية :

اذا كانت لدينا مجموعة جزئية معينة $S=\{A_1,\ldots\ldots,A_n\}$ من متجهات تنتمي الى فضاء متجهات V على حقل F فهل يوجد فضاء جزئي يحتوي على المجموعة S . وماهو اصغر تلك الفضاءات الجزئية التي تحتوي على المجموعة S .

إنه لمن المهم جداً ان نعرف اصغر فضاء جزئي يحتوي على مجموعة جزئية معطاة لان الفضاء V نفسه يعتبر فضاءاً جزئياً من V ودائماً يحتوي على اي مجموعة جزئية معطاة .

يقدم لنا التعريف الاتي الاداة الرئيسية لبناء مثل هذه الفضاءات الجزئية .

تعريف :

يسمى المتجه A بتركيب خطي من المتجهات $B_1, \ldots, B_k$ **اذا امكن التعبير عنه بالصورة** $A= x_1B_1+\ldots\ldots+x_kB_k$

حيث : $x_1,\dots,x_k$ اعداداً قياسية .

مثال (1) :

اذا كان $A=(1,5,0)$ ، $B=(2,0,-1)$ متجهين في R^3 فبين ان $C=(3,-5,-2)$ يكون تركيباً خطياً من A,B . وان $D=(-2,20,7)$ لايكون تركيباً خطياً من A و B .

الحل: لكي يكون C تركيباً خطياً من A و B يجب ان توجد اعداد قياسية x_1, x_2 بحيث يكون $C=x_1A+x_2B$ اي ان

$(3,-5,-2)=x_1(1,5,0)+x_2(2,0,-1)$.

أو

$$(3,-5,-2)=(x_1+2x_2, 5x_1, -x_2)$$

بمساواة المركبات المتناظرة نحصل على

$$x_1+2x_2=3$$
$$5x_1=-5$$
$$-x_2=-2$$

حل هذا النظام يعطي $x_1=-1$ و $x_2=-2$

اي ان $C=-A+2B$

بالمثل بالنسبة الى D لكي لايكون تركيباً خطياً يجب ان لاتوجد اعداد قياسية x_2,x_1 بحيث : $D=x_1A+x_2B$ ، فلو وضعنا $D=x_1A+x_2B$ ، لحصلنا على :

$(-2,20,7)=x_1(1,5,0)+x_2(2,0,-1)$

أو $(-2,20,7)=(x_1+2x_2,5x_1,-x_2)$

مساواة المركبات المتناظرة تعطي :

$$x_1 + 2x_2 = -2$$
$$5x_1 = 20$$
$$-x_2 = 7$$

المعادلتان الثانية والثالثة تعطيان $x_2 = -7,\ x_1 = 4$

لكن هذه القيم لاتحقق المعادلة الاولى اي ان النظام اعلاه غير متوافق، واذن لاتوجد مثل هذه الاعداد القياسية . ومن ثم D ليس تركيباً خطياً من A و B .

مثال (2) :

اذا كان : $A = 1 + x$ ، $B = x^2 - 3$ ، $C = 2 - x + x^3$ ، متجهات في الفضاء $P_3(R)$ على حقل الاعداد الحقيقية R فهل ان المتجه $D = 1 - x + x^2$ يكون تركيباً خطياً من C, B, A .

الحل : لكي يكون D تركيباً خطياً من A و B و C يجب ان توجد اعداد قياسية a_1, a_2, a_3 بحيث

$$D = a_1A + a_2B + a_3C$$

او

$$1 - x + x^2 = a_1(1 + x) + a_2(x^2 - 3) + a_3(2 - x + x^3)$$

$$1 - x + x^2 = (a_1 - 3a_2 + 2a_3) + (a_1 - a_3)x + a_2x^2 + a_3x^3$$

بمساواة معاملات x^k في كلا الطرفين $(k = 0,1,2,3)$ نحصل على :

$$a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 1 \ldots\ldots (1)$$
$$a_1 - a_3 = -1 \ldots\ldots (2)$$
$$a_2 = 1 \ldots\ldots (3)$$
$$a_3 = o \ldots\ldots (4)$$

ان المعادلات (2) , (3) , (4) تعطي

$$a_1 = -1 , a_2 = 1 , a_3 = 0$$

لكن هذه القيم لا تحقق المعادلة (1) اي ان النظام اعلاه غير متوافق وبالتالي لاتوجد اعداد قياسية a_1, a_2, a_3 تحقق

$$D = a_1A + a_2B + a_3C$$

وهذا يعني ان D لايكون تركيباً خطياً من C,B,A .**لنفرض الآن ان S مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متجهات V على الحقل F ولتكن**

$$[S] = \{x_1A_1 + ... + x_nA_n : x_i \in F, A_i \in S, n \in N\}$$

حيث N = مجموعة الاعداد الطبيعية .

ان المجموعة [S] اعلاه تمثل مجموعة المتجهات في V التي يكون كل منها تركيباً خطياً لعناصر مجموعة جزئية منتهية من المجموعة S . سوف نطلق إسم مجموعة التركيبات الخطية لعناصر S على المجموعة [S] . المبرهنة التالية تجيب على التساؤلات التي طرحناها في مقدمة هذا البند .

مبرهنة (1.6.1) :

ليكن V فضاء متجهات على الحقل F و S مجموعة جزئية غير خالية من V . ان مجموعة التركيبات الخطية لعناصر S والتي يرمز لها بالرمز [S] تكون اصغر فضاء جزئي يحتوي على S .

البرهان : نبرهن اولاً على ان المجموعة [S] تكون فضاءاً جزئياً ، ولهذا الغرض نأخذ

$$B = y_1B_1 + ... + y_mB_m, A = x_1A_1 + ... + x_nA_n$$

اي متجهين في [S] حيث ان $B_1,....,B_m, A_1,...., A_n$ متجهات في S و $y_1,...,y_m,x_1,...,x_n$ اعداد قياسية في F

$$A + B = x_1A_1 + ... + x_nA_n + y_1B_1 + ... + y_mB_m$$

وهذا ايضاً تركيب خطي لعدد محدود من عناصر S وبالتالي يكون عنصراً في [S] ، اي ان [S] مغلقة تحت عملية الجمع .

والان نأخذ $k \in F$ اي عدد قياسي ونلاحظ

$$kA = k(x_1A_1 + \ldots + x_nA_n)$$
$$= (kx_1)A_1 + \ldots + (kx_n)A_n$$

نستنتج من هذا ان kA يكون تركيباً خطياً لعناصر من S وبالتالي يكون عنصراً في $[S]$ ، اي ان $[S]$ مغلقة بالنسبة لعملية الضرب القياسي وبالتالي تكون $[S]$ فضاءاً جزئياً.

لكي نبرهن على ان $[S]$ يحتوي على S اي ان

$$S \subset [S]$$

نأخذ $A \in S$ ، ونلاحظ ان : $A = 1.A$

لكن $1 \in F$. اذن A يكون تركيباً خطياً لعناصر من S وبالتالي $A \in [S]$

لو كان M فضاءاً جزئياً يحتوي على S ، اي ان

$$S \subset M$$

فيجب ان يكون $[S] \subset M$

فلو اخذنا $B = x_1B_1 + \ldots + x_nB_n$

عنصراً في $[S]$ ، حيث $B_i \in S$ و $x_i \in F$

لاستنتجنا مايلي : لكل $i = 1, \ldots, n$

$B_i \in S$ تنتج $B_i \in M$ (لان $(S \subset M)$ و $B_i \in M$ و $x_i \in F$ تنتج $x_iB_i \in M$ (لان M فضاءاً جزئي)، هذا يعني ان المتجه $B = x_1B_1 + \ldots + x_nB_n$ ايضاً. ينتمي الى M . بذلك يكون $[S]$ اصغر فضاء جزئي يحتوي على المجموعة الجزئية S .

(و . هـ . م .)

اذا كان V فضاء متجهات على حقل F و S مجموعة جزئية غير خالية من V فإن الفضاء الجزئي $[S]$ يسمى الفضاء الجزئي المولد من قبل المجموعة الجزئية S ويقال عن المجموعة S بأنها مجموعة مولدة للفضاء الجزئي $[S]$.

مثال (3) :

بين ان المجموعة الجزئية $S=\{(1,0)\ ,\ (0,1)\}$ تولد الفضاء R^2 .

الحل : يجب ان نبين على ان $[S]\ =\ R^2$ اي ان كل متجه $A=(x,y)$ في R^2 يمكن ان يكتب كتركيب خطي من متجهات في S . وهذا يمكن ملاحظته اذا كتبنا

$$A=(x,y)=x(1,0)\ +\ y\,(0,1)$$

مثال (4) :

ماهو اصغر فضاء جزئي يحتوي على المجموعة الجزئية

$$S=\{(x,y,z):\ 2x\text{-}y+z=o\}$$

من الفضاء R^3 .

الحل : نلاحظ بأن المجموعة الجزئية S اعلاه تكون بحد ذاتها فضاءاً جزئياً من R^3 وبالتالي يكون $S\ =\ [S]$ اي ان اصغر فضاء جزئي يحتوي على S هو S .

مثال (5) :

اذا كانت $S=\{A,B\}$

حيث $A=(0,2,2)$ ، $B=(1,2,0)$

فأثبت ان المجموعة S تولد الفضاء الجزئي

$$M=\{(x,y,z):2x\text{-}y+z=o\}$$

الحل: المطلوب اثباته هنا ان $[S]\ =\ M$

نلاحظ اولاً ان $A\in M$ و $B\in M$ اي ان $S\subset M$.

وبما ان [S] هو اصغر فضاء جزئي يحتوي على S فنستنتج ان $[S]\subset M$.

من ناحية اخرى لو اخذنا $C=(x,y,z)\in M$ وحاولنا كتابة C كتركيب خطي لمتجهات في S ، اي ان

$$C=(x,y,z)=a(0,2,2)+b(1,2,0)$$

فسيكون لدينا :

$$b = x \ldots (1)$$
$$2a + 2b = y \ldots (2)$$
$$2a = z \ldots (3)$$

بما ان M $(x,y,z) \in$

اذن $2x - y + z = 0$

اي $y = 2x + z$

المعادلات (1) , (3) تعطي $a = z/2,\ b = x$ وهذه القيم تحقق المعادلة (2) وذلك لان

$2a + 2b = z + 2x = y$

نستنتج من هذا على ان اي متجه $C = (x,y,z)$ في M يمكن كتابته على الشكل :
$C = (x,y,z) = (z/2)(0,2,2) + x(1,2,0)$ اي ان كل متجه في M يمكن كتابته كتركيب خطي لمتجهات في S .

وبذلك يكون لدينا : $M \subset [S]$

اي ان $M = [S]$

ملاحظة :

المفاهيم والتسميات التي طرحناها في هذا البند تنص على مايلي :

حتى تكون المجموعة S مولدة للفضاء الجزئي M يجب الافتراض مسبقاً بأن S مجموعة جزئية من M وبما ان [S] هو اصغر فضاء جزئي يحتوي على S فإذن $[S] \subset M$.

اي انه عندما يطلب منا ان نثبت ان مجموعة ماتكون مجموعة مولدة لفضاء جزئي معين يجب فقط ان نثبت ان كل متجه في ذلك الفضاء الجزئي يمكن كتابته كتركيب خطي من متجهات تلك المجموعة .

مثال (6) :

في فضاء متجهات V على حقل F ، اذا كان $S = \{A_1, A_2, A_3\}$ و B

متجه في V بحيث $B \in [S]$ فبرهن على ان المجموعة $T = \{A, A_2, A_3, B\}$ تولد نفس الفضاء الجزئي $[S]$، بعبارة اخرى برهن على ان $[T] = [S]$.

الحل : خذ $A \in [S]$

إذن توجد اعداد قياسية x_1, x_2, x_3 بحيث

$$A = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$$

A يمكن كتابته بالصيغة

$$A = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3'A_3 + 0.B$$

وهذه الصيغة تعني ان $A \in [T]$ ، لان A كتب كتركيب خطي من متجهات المجموعة T .

اذن $[S] \subset [T]$

لنأخذ الان $A \in [T]$

إذن توجد اعداد قياسية y_1, y_2, y_3, y_4 بحيث

$$A = y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3 + y_4B \ldots.(1)$$

لكن بالفرض $B \in [S]$ اي انه توجد اعداد قياسية مثل x_1, x_2, x_3 بحيث :

$B = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$ ، عند التعويض عن B في (1) اعلاه ينتج

$$A = y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3 + y_4(x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3)$$
$$= (y_1 + y_4x_1)A_1 + (y_2 + y_4x_2)A_2 + (y_3 + y_4x_3)A_3$$

وهذا يعني ان A يمكن كتابته كتركيب خطي لمتجهات في S وبذلك يكون $A \in [S]$

اي ان $[T] \subset [S]$

عندئذ يكون لدينا $[S] = [T]$

ملاحظة :

المثال اعلاه مهم جداً ويعني انه لو اضفنا الى مجموعة معينة متجهاً يمكن كتابته اصلاً كتركيب خطي من متجهات المجموعة المعينة فأن المجموعة الجديدة

الناتجة من اضافة ذلك المتجه تولد الفضاء الجزئي نفسه . الكلام اعلاه نفسه يمكن ان تعاد صياغته بلغة حذف متجه .

تمارين (1.6)

1 ـــ اي من المتجهات التالية يكون تركيباً خطياً من المتجهين $A = (2,3,-5)$ ، $B = (7,0,1)$ ، وذلك في الفضاء R^3 على حقل الاعداد الحقيقية .

(أ) $(1,1,1)$ ، (ب) $(-2,0,4)$

(ج) $(5,-3,6)$ ، (د) $(0,0,1)$

(هـ) $(11/2, 3, -9/2)$ (و) $(7\sqrt{2},0, 2)$

2 ـــ اي من المتجهات التالية يكون تركيباً خطياً من المتجهات :

$A = 1 + x,\ B = x-x^2 + x^4,\ C = 5 + x^3$

وذلك في الفضاء $P_4(R)$ على حقل الاعداد الحقيقية .

(أ) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

(ب) $4 + x^3-x^2 + x^4$

(ج) x^2

(د) 7

(هـ) $17 + x + x^2 + 3x^3-x^4$

(و) $-5 + x^3$

3 ـــ في الفضاء $M_2(R)$ على حقل الاعداد الحقيقية، عبر عما يلي كتركيب خطي من المتجهات :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ و (ب) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$ و (ج) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{2}-3 & \sqrt{2}-3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$ (د)

4 ــ في كل مما يلي ، حدد فيما اذا كانت المتجهات المعطاة تولد الفضاء R^3 .

(أ) $A_1 = (1,1,1), A_2 = (2,5,3), A_3 = (-1,0,4)$.

(ب) $A_1 = (3,0,1), A_2 = (-1,-2,5), A_3 = (2,-2,6)$.

(ج) $A_1 = (2,0,0), A_2 = (0,5,4), A_3 = (3,1,7)$.

5 ــ اعتبر C فضاء متجهات على حقل الاعداد الحقيقية ثم برهن على ان $z_1 = 1-2i$ ، $z_2 = 2+3i$ يولدان $\mathbb{C}$.

6 ــ برهن على ان المتجهات :

$A_1 = 1, A_2 = 1-x, A_3 = (1-x)^2, A_4 = (1-x)^3$ تولد الفضاء $P_3(R)$.

7 ــ حدد اي مما يلي يقع في الفضاء الجزئي المولّد من

$A = Cos^2x,\ B = Sin^2x$ وذلك في فضاء الدوال $C(0,1)$ على حقل الاعداد الحقيقية .

(أ) $Cos2x$ ، (ب) $3-x^2$ ، (ج) $Sinx$.

8 ــ جد الفضاء الجزئي المولد من قبل المتجهين

$A = (2,1,-5)$, $B = (4,3,7)$

وذلك في الفضاء R^3 .

9 ــ جد معادلة المستقيم المولد من قبل المتجه $A = (2,0,-3)$ وذلك في الفضاء R^3 .

10 ــ ليكن V فضاء متجهات على الحقل F ، ولتكن A,B,C ثلاثة متجهات في V بحيث $aA + bB + cC = O$ و $ac \neq 0$ (a,b,c اعداد قياسية من الحقل F) برهن على ان المجموعتين $\{A,B\}$ و $\{A,C\}$ تولدان الفضاء الجزئي نفسه من V .

11 ــ اثبت ان مجموعتي المتجهات : $\{A = (1,1,0)\ ,\ B = (0,0,1)\}$ ،

$\{C=(1,1,1),\ D=(-1,-1,1)\}$ تولدان الفضاء الجزئي نفسه من الفضاء R^3.

12 ـــ اثبت ان اي متجه غير **صفري** يولد الفضاء F على الحقل F .

13 ـــ في الفضاء R^3 على الحقل R ، اذا كانت

$T=\{(0,3,-3)\},\ S=\{(1,0,0),\ (0,2,0)\}$.

(أ) جد $[S],\ [T]$ الفضائين الجزئيين المولدين من قبل T,S على التوالي .

(ب) هل ان المتجه $(5,-3,0)$ ينتمي الى $[S]$؟ .

(ج) هل ان المتجه $(3,2,1)$ ينتمي الى $[S]$؟ .

(د) هل ان المتجه $(2,1,1)$ ينتمي الى $[T]$؟ .

(و) ماهي المتجهات التي تنتمي الى $[T]\cap[S]$

14 ـــ اذا كان M,N فضاءين جزئيين من فضاء المتجهات V على الحقل F فبرهن على ان : $M+N=[M\cup N]$ (راجع البند (1.5))

15 ـــ اذا كانت S,T مجموعتين جزئيتين من فضاء المتجهات V على الحقل F فبرهن :

(أ) اذا كان $S\subset T$ فإن $[S]\subset[T]$.

(ب) $[S\cap T]\subset[S]\cap[T]$.

(ج) $[S\cup T]=[S]+[T]$.

16 ـــ اعط **مثالاً** على فضاء متجهات ومجموعتين جزئيتين T , S بحيث لايتساوى طرفا (ب) اعلاه .

17 ـــ اذا كان V فضاء متجهات على الحقل F و T,S مجموعتان جزئيتان من V بحيث ان $[S]\subset[T]$ ، فهل ان $S\subset T$؟ .

18 ـــ لأي متجهين غير صفريين A,B في فضاء متجهات V على حقل F ، برهن على ان $[A]=[B]$ اذا وفقط اذا $B=rA$ لبعض $r\in F$.

(1.7) الاستقلال الخطي والارتباط الخطي

Linear Independan ce and Linear Dependance

سنناقش في هذا البند مسألة الاستقلال والارتباط الخطي التي بدورها ستكون مدخلاً لدراسة قواعد فضاءات المتجهات .

تعريف :

يقال بأن المجموعة الجزئية S من فضاء المتجهات V على الحقل F مجموعة من المتجهات مرتبطة خطياً اذا وفقط اذا وجدت اعداد قياسية $x_1,\dots\dots,x_n$ ليست جميعها مساوية للصفر وكذلك وجدت متجهات مختلفة $A_1,\dots\dots,A_n$ في S بحيث

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots. + x_nA_n = O$$

مثال (1) :

المجموعة : $S = \{(1,2), (2,5), (0,1)\}$.

تكون مجموعة مرتبطة خطياً من المتجهات في الفضاء R^2 وذلك لان :

$$2(1,2) + (1)(0,1) + (-1)(2,5) = (0,0)$$

مثال (2) :

في الفضاء $P_2(R)$ على الحقل R ، برهن على ان المجموعة

$$S = \{5, 2 + x, x^2, 1 + 4x\text{-}x^2\}$$

مرتبطة خطياً .

الحل : لكي نبرهن على ان المجموعة اعلاه مجموعة مرتبطة خطياً يجب ايجاد اعداد حقيقية a_1,a_2,a_3,a_4 ليست جميعها مساوية للصفر وتحقق :

$$a_1(5) + a_2(2 + x) + a_3(x^2) + a_4(1 + 4x\text{-}x^2) = O \ .$$

بعد تبسيط الطرف الايسر للمعادلة اعلاه نحصل على

$$(5a_1+2a_2+a_4) + (a_2+4a_4)x + (a_3-a_4)x^2 = O$$

ولكي تكون متعددة الحدود في الطرف الايسر مساوية لمتعددة الحدود **الصفرية** /يجب ان تكون جميع المعادلات تساوي صفر وبهذا نحصل على المعادلات :

$$5a_1+2a_2+a_4=o……(1)$$
$$a_2+4a_4=o……(2)$$
$$a_3-a_4=o……(3)$$

حل هذه المعادلات يكون :

$.\ a_3=a_4,\ a_2=-4a_4,\ a_1=(7/5)a_4$

وهذا يعني ان نظام المعادلات اعلاه لديه عدة حلول ولغرض الحصول على حل غير صفري نضع على سبيل المثال $a_4=1$ وبهذا نحصل على :

$$a_1=7/5\ ,\ a_2=-4\ ,\ a_3=1\ ,\ a_4=1$$

وهذا يعني ان :

$$(7/5)(5) + (-4)(2+x) + (1)(x^2) + (1)(1+4x-x^2) = o$$

اي ان المجموعة S مرتبطة خطياً .

تعريف :

يقال بأن المجموعة الجزئية S مستقلة خطياً اذا وفقط اذا S مجموعة غير مرتبطة خطياً .

التعريف اعلاه يكافيء مايلي :

اذا كان اي تركيب خطي لمتجهات في S مساوياً للصفر فيجب على جميع المعاملات بأن تساوي صفر . فإذا كانت المجموعة S منتهية . اي ان : $S=\{A_1,……,A_n\}$ فإن S تكون مستقلة خطياً اذا كان الحل الوحيد للمعادلة .

$$x_1A_1+….+x_nA_n=O$$

هو الحل **الصفري**، اي $x_1=x_2=….=x_n=o$

مثال (3) :

برهن على ان المجموعة الجزئية

$$S = \{(1,1,1), (0,10,1), (0,0,1)\}$$

من الفضاء R^3 تكون مجموعة مستقلة خطياً .

الحل : يجب ان نبرهن على ان الحل الوحيد للمعادلة

$$x_1(1,1,1) + x_2(0,1,1) + x_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

هو الحل **الصفري** ، اي ان : $x_1 = x_2 = x_3 = o$

تصبح المعادلة اعلاه بعد التبسيط

$$(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3) = (0,0,0)$$

بذلك نحصل على :

$$x_1 = o, x_1 + x_2 = o, x_1 + x_2 + x_3 = o$$

من هذا نرى ان الحل الوحيد هو

$$x_1 = o , x_2 = o , x_3 = o$$

مثال (4) :

لتكن : $S = \{(1,i), (i,-1)\}$ مجموعة جزئية من الفضاء C^2 على الحقل C . هل ان S مستقلة خطياً ام مرتبطة خطيا؟

الحل : لغرض الاجابة على السؤال اعلاه يجب ان نحدد فيما اذا كان للمعادلة

$$z_1(1,i) + z_2(i,-1) = (0,0)$$

حل غير صفري ، حيث ان z_1, z_2 عددان عقديان . المعادلة اعلاه تكافىء المعادلة .

$$(z_1 + iz_2, iz_1 - z_2) = (0,0)$$

بهذا نحصل على معادلتين أنيتين بمجهولين z_1, z_2 هما :

$$z_1 + iz_2 = o....(1)$$

$$iz_1 - z_2 = o....(2)$$

نلاحظ انه لو ضربنا المعادلة (1) في العدد العقدي i لحصلنا على المعادلة (2) . اي ان المعادلة (2) ليست جديدة وبهذا تبقى معادلة واحدة هي :

$$z_1 + iz_2 = o$$

حل المعادلة اعلاه يكون : $z_1 = -iz_2$

بأخذ $z_2 = 1$ نحصل على $z_1 = -i$

اي انه يوجد حل غير صفري . ومن هذا نستنتج على ان المجموعة S مجموعة مرتبطة خطياً .

مثال (5) :

برهن على ان المجموعة الجزئية $S = \{1+x,\ 1-x,\ x^2, 3x^3\}$ من الفضاء $P_3(R)$ تكون مجموعة مستقلة خطياً .

الحل : نلاحظ المعادلة :

$$a(1+x) + b(1-x) + c(x^2) + d(3x^3) = O$$

ونحاول ان نبرهن على ان الحل الوحيد هو الحل الصفري ، حيث ان a,b,c,d اعداداً حقيقية .

المعادلة اعلاه تكافىء المعادلة

$$(a+b) + (a-b)(x) + c(x^2) + 3d(x^3) = O$$

والتي منها نستنتج على ان :

$$a+b=o$$
$$a-b=o$$
$$c=o$$
$$3d=o$$

ومن هذا النظام البسيط للمعادلات نستنتج على ان $a = o, b = o, c = o, d = o$
وهذا يعني ان المجموعة S مجموعة مستقلة خطياً.

مثال (6) :

اذا كان V فضاء متجهات على الحقل R وكانت $E = \{A, B, C\}$ مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات في V فبرهن على ان المجموعة
$S = \{A + B, B + C, A + C\}$
مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات في V .

الحل: نأخذ المعادلة

$$x_1(A + B) + x_2(B + C) + x_3(A + C) = O$$

ونحاول ان نبرهن على ان الحل الوحيد هو الحل الصفري. تبسيط المعادلة اعلاه ينتج

$$(x_1 + x_3) A + (x_1 + x_2) B + (x_2 + x_3) C = O$$

بما ان المتجهات A, B, C تكون مجموعة مستقلة خطياً بالفرض
اذن يجب ان يكون الحل الوحيد للمعادلة اعلاه هو الحل الصفري اي :

$$x_1 + x_3 = o, x_1 + x_2 = o, x_2 + x_3 = o$$

وهذه المعادلات الثلاثة تنتج :

$$x_1 = o, x_2 = o, x_3 = o$$

سوف نذكر بعض المبرهنات والنتائج التي تساعدنا كثيراً في معرفة فيما اذا كانت مجموعة ما من المتجهات مستقلة خطياً ام مرتبطة خطياً.

مبرهنة (1.7.1) :

ليكن V فضاء متجهات على الحقل F ولتكن S مجموعة جزئية من V .
اذا كانت المجموعة الجزئية S تحتوي على المتجه الصفري O فإنها تكون مرتبطة خطياً.

البرهان : بما ان : **1.O=O**

اذاً بوضع : $x_1 = 1, A_1 = O \ \ S, n = 1$

نكون قد حققنا ماورد في تعريف المجموعة المرتبطة خطياً .

(و . هـ . م .)

نتيجة (1.7.2) :

اذا كان M فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V على اي حقل F فإن M يكون مجموعة مرتبطة خطياً .

البرهان :

كل فضاء جزئي يجب ان يحتوي على المتجه الصفري O .

(و . هـ . م .)

تعريف :

يقال بأن المتجه A يعتمد خطياً على المجموعة S اذا وفقط اذا كان : $A \in [S]$.

« اي ان A يمكن كتابته كتركيب خطي من متجهات تنتمي للمجموعة S » .

مبرهنة (1.7.3) :

المجموعة S تكون مرتبطة خطياً اذا وفقط اذا وجد متجه A في S يعتمد خطياً على باقي المتجهات في S .

البرهان :

لنفترض ان المجموعة S مرتبطة خطياً. هذا يعني انه توجد اعداد قياسية $x_1, \ldots\ldots, x_n$ ومتجهات مختلفة $A_1,\ldots,A_n$ في S بحيث

$$x_1A_1 + \dots + x_nA_n = O$$

وليست جميع الاعداد $x_1,\dots,x_n$ تكون مساوية للصفر . بتغيير الترتيب ان اقتضت الضرورة يمكننا دائماً ان نفترض على ان $x_1 \neq o$. بهذا يمكننا ان نكتب

$$A_1 = (-x_2/x_1)A_2 + \dots + (-x_n/x_1)A_n$$

اي ان A_1 يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات $A_2,\dots,A_n$ المنتمية الى S وهذا يعني ان A_1 يعتمد خطياً على باقي المتجهات في S .

على العكس لو افترضنا بأنه يوجد متجه $A \in S$ يعتمد خطياً على باقي متجهات S لكان بأستطاعتنا ان نجد متجهات مختلفة $B_1,\dots,B_k$ في S (تختلف عن A) بحيث :

$$A = x_1B_1 + \dots + x_kB_k$$

اي ان :

$$x_1B_1 + \dots + x_kB_k + (-1)A = O$$

والمعادلة اعلاه تعني وجود متجهات مختلفة في S هي :

$A,B_1,\dots,B_k$ واعداد قياسية $x_1,\dots,x_k,-1$ تحقق المعادلة. بما ان $o \neq (-1)$. اذن الاعداد القياسية اعلاه ليست جميعها مساوية للصفر . بهذا تكون المجموعة S مرتبطة خطياً .

(و. هـ . م.)

مبرهنة (1.7.4) :

لتكن $S = \{A_1,\dots,A_n\}$ مجموعة منتهية من المتجهات . S تكون مرتبطة خطياً اذاً وفقط اذا وجد متجه $A_k \in S$ ،$(k \leq n)$ يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه اي ان : $A_k = a_1A_1 + \dots + a_{k-1}A_{k-1}$

البرهان :

افرض ان S مجموعة مرتبطة خطياً. عندئذ توجد اعداد قياسية $a_1,\dots,a_n$ ليست جميعها مساوية للصفر بحيث ان

$$a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_nA_n = O \qquad \dots(1)$$

الان افرض ان m هو اكبر عدد بين 1 و n بحيث $a_m \neq o$. هذا يعني ان $a_{m+1} = \ldots\ldots = a_n = o$ وبهذا يمكننا ان نكتب المعادلة (1) على الشكل

$$a_1A_1 + \ldots + a_mA_m = o$$

وبذلك يمكننا ان نكتب $A_m = (-a_1/a_m)A_1 + \ldots\ldots + (-a_{m-1}/a_m)A_{m-1}$

وهذا يبرهن على ان A_m يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه . على العكس لو افترضنا وجود متجه $A_m \in S$ يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه لاصبح A_m يعتمد خطياً على S، اي ان S مجموعة مرتبطة خطياً .

(و . هـ . م .)

ملاحظة :

المبرهنة اعلاه تختلف عن المبرهنة (1.7.3) بنقطتين الاولى هي انها تتحدث عن مجموعة منتهية من المتجهات ، في حين أن (1.7.3) تتحدث عن اي مجموعة . النقطة الثانية هي تنظيمية حيث ان المتجه المراد كتابته كتركيب خطي من الاخريات يعاد ترقيمه بحيث يكون ترتيبه في آخر مجموعة المتجهات التي يعتمد عليها .

تمارين (1.7)

1 ـــ بمجرد النظر الى كل فرع مما يلي اشرح اسباب كون مجموعة المتجهات مرتبطة خطياً .

(أ) $A_1 = (2,0)$, $A_2 = (-4,0)$ في R^2 .

(ب) $A_1 = 1 + x$, $A_2 = -2-2x$ في $P_1(R)$.

(ج) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ في $M_2(R)$.

2 ـــ اي من المجموعات الجزئية التالية من المتجهات في R^3 تكون مرتبطة خطياً .

أ) $(1,2,3)$, $(0,4,-1)$, $(2,8,5)$.

ب) $(1,2,1)$, $(-1/2,-1,-1/2)$, $(7,\sqrt{2},3)$.

ج) $(1,1,0)$, $(0,1,1)$.

د) $(1,2,1)$, $(4,0,1)$, $(2,1,3)$, $(0,0,1)$.

3 ــ اختبر كلاً من المجموعات الجزئية التالية من المتجهات في R^4 من ناحية الارتباط الخطي والاستقلال الخطي .

أ) $(1,1,0,1)$, $(-1,2,\sqrt{2},0)$, $(0,3,\sqrt{2},1)$.

ب) $(-2,0,0,0)$, $(0,1/2,1,1)$, $(1,1,0,0)$, $(0,3,1,0)$.

ج) $(1,2,1,0)$, $(4,0,1,0)$, $(2,1,3,0)$, $(0,0,1,0)$.

د) $(2,-3,1,0)$, $(4,0,7,2)$.

4 ــ اي من المجموعات الجزئية التالية من المتجهات في $P_2(R)$ تكون مستقلة خطياً .

أ) $1+x, x-x^2, -2+x^2, 3$.

ب) $-1/2+\sqrt{2}x+x^2$, $x-3x^2$, $1+x+x^2$.

ج) $2x+x^2$, $1-x+x^2$.

د) $1+x-x^2$, $2x+\sqrt{2}x^2$, $2+4x+(\sqrt{2}-2)x^2$.

5 ــ اي من المجموعات الجزئية التالية من المتجهات في C^2 على الحقل C تكون مرتبطة خطياً .

أ) $(i,1-2i)$, $(1,-3)$, $(0,1+i)$.

ب) $(1+i,0)$, $(0,1-i)$.

ج) $(0,1)$, $(-1,0)$.

د) $(1+i,2)$, $(-1+i,2i)$.

6 ــ اي من المجموعات الجزئية التالية من المتجهات في C^2 على الحقل R تكون مرتبطة خطياً .

أ) $(i,1-2i)$, $(1,-3)$, $(0,1+i)$.

ب) $(1+i,2)$, $(-1+i,2i)$.

ج) $(1,0)$, $(0,i)$, $(2i,0)$, $(1+i,1-i)$.

د) $(1+i,2-3i)$, $(1,0)$, $(0,i)$, $(2i,0)$, $(0,7)$.

7 ــ برهن على ان مجموعة المتجهات S في R^3

$$S=\{(1,0,0)\ ,\ (0,1,0)\ ,\ (0,0,1)\ ,\ (1,1,1)\}$$

تكون مجموعة مرتبطة خطياً لكن اي مجموعة جزئية منها مكونة من ثلاث متجهات تكون مستقلة خطياً .

8 ــ تحت اي شرط على العددين الحقيقين a,b يكون المتجهان $(1,a)$ و $(1,b)$ مستقلين خطياً في R^2 .

9 ــ لاي قيم a الحقيقية تكون المتجهات التالية مجموعة مرتبطة خطياً في R^3 .

$$A_1=(a,-1,-1),\ A_2=(-1,a,-1)\ ,\ A_3=(-1,-1,a)\ .$$

10 ــ هل ان المجموعة الجزئية من R^2

$$S=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$$

مجموعة مرتبطة خطياً ام مستقلة خطياً .

11 ــ افرض ان V هو فضاء المتجهات المتكون من جميع الدوال ذات القيم الحقيقية والمعرفة على المستقيم الحقيقي بأكمله . اي من المجموعات الجزئية التالية من المتجهات في V تكون مرتبط خطياً .

أ) $\{3, -Sin^2x, 2Cos^2x\}$.

ب) $\{2x, Cosx\}$.

ج) $\{-4, Sinx, Sin2x\}$.

د) $\{Cos2x\ ,\ Sin^2x,\ Cos^2x\}$.

هـ) $\{(1+x)^2, x^2+2x, -2\}$.

و) $\{o, x, x^2, x^3\}$.

12 ــ اثبت ان اي مجموعة جزئية مكونة من ثلاث متجهات او اكثر في $P_1(R)$ تكون مرتبطة خطياً .

13 ــ إفترض ان V هو فضاء المتجهات المكون من الدوال ذات القيم الحقيقية والمعرفة على المستقيم الحقيقي بأكمله. اذا كانت h,g,f متجهات في V بحيث تكون قابلة للاشتقاق مرتين، فإن الدالة w المعرفة بواسطة :

$$w(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix}$$

تسمى رونسكيان h,g,f . اثبت ان h,g,f تكون مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات اذا وفقط اذا لم يكن الرونسكيان هو المتجه الصفري في V (اي ان w(x) لاتساوي الصفر تطابقاً).

14 ــ استخدم الرونسكيان (تمرين 13) لاثبات ان مجموعات المتجهات التالية تكون مستقلة خطياً .

(أ) $\{1, x, e^x\}$.

(ب) $\{Sinx, Cosx, xSinx\}$.

(ج) $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$.

(د) $\{1, x, x^2\}$.

(1.8) القواعد والفضاءات المنتهية البعد

Bases and Finite Dimensional vector Spaces

لاحظنا في البند (1.6) وجود مجموعات جزئية من فضاءات المتجهات بأستطاعتها توليد تلك الفضاءات، اي ان كل متجه في الفضاء يمكن كتابته كتركيب خطي من متجهات تلك المجموعة، فمثلاً المجموعة الجزئية $S = \{(1,0), (0,1), (2,4)\}$ من الفضاء R^2 على الحقل R تولد ذلك الفضاء.

بعض الفضاءات مثل فضاء متعددات الحدود ذات المعاملات الحقيقية ومن اي درجة لايمكن توليدها من قبل مجموعة منتهية من المتجهات . سنركز في هذا الكتاب فقط على الفضاءات التي يمكن توليدها من قبل مجموعة منتهية من المتجهات وسنطلق اسماً معيناً على تلك الفضاءات ، ثم نطلق اسم « قاعدة » على اصغر تلك المجموعات ، ونناقش هذه المسألة بإسهاب .

تعريف :

ليكن V فضاء متجهات على الحقل F . يقال بأن V فضاء منتهي البعد اذاً وفقط اذا وجدت مجموعة جزئية منتهية S من V بحيث ان $V = [S]$
اي ان S تكون مجموعة مولدة الى V .

مثال (1) :

الفضاء R^n على الحقل R يكون فضاءاً منتهي البعد ، وذلك لان المجموعة الجزئية :

$$S = \{\underset{A_1}{(1,0,0,\ldots\ldots,0)}, \underset{A_2}{(0,1,0,\ldots\ldots,0)}, \ldots\ldots, \underset{A_n}{(0,0,\ldots\ldots,0,1)}\}$$

منتهية وتولد R^n .
فمثلاً عندما $n = 3$ ، تكون .

$$S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

وان اي متجه $A = (a_1, a_2, a_3)$ يمكن كتابته كتركيب خطي من متجهات المجموعة S كلآتي :

$$A = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)$$

ملاحظـة :

اذا كان الفضاء منتهي البعد فإنه توجد اكثر من مجموعة جزئية منتهية ومولدة للفضاء فمثلاً المجموعة

$$S=\{(2,0,0), (0,3,0), (0,0,-1), (4,2,7)\}$$

تكون ايضاً مولدة الى R^3

مثال (2) :

ليكن $P_\infty(R)$ فضاء المتجهات على الحقل R الذي يحتوي على جميع متعددات الحدود بـ x . ان $P_\infty(R)$ ليس فضاءاً منتهي البعد . فإذا افترضنا ان المجموعة الجزئية $S=\{A_1(x),\ldots,A_n(x)\}$ تولد الفضاء لحصلنا على تناقض لان متعددة الحدود

$$B(x)=xA_n(x)$$

تكون متعددة حدود ذات درجة $(n+1)$ ولايمكن كتابتها كتركيب خطي من $A_1(x),\ldots,A_n(x)$.

في ضوء الملاحظة اعلاه نذكر المبرهنة التالية :

مبرهنة (1.8.1) :

اذا كان V فضاء متجهات منتهي البعد فإنه توجد مجموعة جزئية منتهية ومستقلة خطياً S بحيث $V=[S]$ ، (اي ان V يولد من قبل مجموعة منتهية ومستقلة خطياً) .

البرهان :

بما ان V فضاء منتهي البعد فعليه توجد مجموعة جزئية منتهية $S=\{A_1,\ldots,A_n\}$ بحيث $V=[S]$.

اذا كانت S مجموعة مستقلة خطياً فإنه لايوجد شييء يستحق البرهان . اما اذا كانت S مجموعة مرتبطة خطياً فحسب المبرهنة (1.7.3) ، يوجد متجه $A_k \in S$ يعتمد خطياً على بقية المتجهات،بإعادة الترتيب ان اقتضت الضرورة يمكننا ان نفترض ان A_n يمكن كتابته كتركيب خطي من بقية المتجهات $A_1,\ldots,A_{n-1}$. لتكن $S_1=\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}$. نلاحظ الان ان $[S]=[S_1]$،اذا كانت S_1 مستقلة

خطياً فإنتهى البرهان ، اما اذا كانت مرتبطة خطياً فنحذف المتجه الذي يعتمد خطياً على بقية المتجهات ونحصل على مجموعة S_2 تحقق : $[S_1] = [S_2]$

وهكذا الى ان نصل الى مجموعة جزئية $S_k \subset S$ تكون مستقلة خطياً وتحقق $[S_k] = [S_{k-1}] = \ldots\ldots = [S_1] = [S] = V$

(و . هـ . م .)

ان المجموعات الجزئية التي تتصف بكونها مولدة ومستقلة خطياً مهمة جداً ، واساسية في تطوير دراسة الموضوع ، لذلك نقدم التعريف الاتي :

تعريف :

يقال بأن المجموعة الجزئية S من فضاء المتجهات V قاعدة الى V اذا وفقط اذا كانت S مجموعة مولدة ومستقلة خطياً .

بما اننا اعطينا امثلة كثيرة في البندين (1.6) ، (1.7) على مسألتي توليد الفضاء والاستقلال الخطي فإننا سنكتفي بذكر بعض القواعد لبعض الفضاءات دون التحقيق .

مثال (3) :

المجموعة $S = \{(1,0,\ldots,0) , (0,1,0,\ldots,0) , (0,0,\ldots,0,1)\}$ المتكونة من n من المتجهات تكون قاعدة للفضاء F^n على الحقل F وذلك لاي عدد طبيعي n ولاي حقل F . هذه القاعدة تسمى القاعدة الطبيعية .

نود الاشارة هنا الى انه بالامكان تواجد قواعد عديدة مختلفة للفضاء نفسه ، كما في المثال أدناه .

مثال (4) :

المجموعـــــــات $S_1 = \{(2,0), \ (0,-1)\}, \ \ S_2 = \{(1,4), \ \ (2,3)\}$ ، $S_3 = \{(2,5), (0,1)\}$ ، تعتبر قواعد مختلفة للفضاء R^2 على الحقل R .

مثال (5) :

المجموعة

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

تكون قاعدة للفضاء $M_2(R)$ على الحقل R ، وتسمى بالقاعدة الطبيعية .

مثال (6) :

المجموعة : $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ تكون قاعدة للفضاء $P_n(F)$ وذلك لاي عدد طبيعي n ولاي حقل F . هذه القاعدة تسمى بالقاعدة الطبيعية . راجع مثال (4) من البند (1.3) .

مثال (7) :

المجموعة $S=\{(1,0)\ ,\ (0,1)\}$ تكون قاعدة للفضاء C^2 على الحقل C . لكنها لاتصلح بأن تكون قاعدة للفضاء C^2 على الحقل R ، وذلك لكونها غير مولدة لذلك الفضاء ولرؤية ذلك نلاحظ بأن المتجه (2i,0) لايمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهين (1,0) , (0,1) خصوصاً وان اعدادنا القياسية هي اعداد حقيقية .

المجموعة : $S=\{(1,0), (i,0)\ ,\ (0,1), (0,i)\}$ تكون قاعدة للفضاء C^2 على الحقل R .

الامثلة الاتية تبين كيفية ايجاد القواعد لبعض الفضاءات الجزئية .

مثال (8) :

جد قاعدة للفضاء الجزئي $M=\{(x,y,z):\ 2x-y+z=o\}$ من فضاء المتجهات R^3 على الحقل R .

الحل : بعد التعويض عن احد المتغيرات وليكن z مثلاً بدلالة المتغيرين الاخرين ، يمكننا وصف الفضاء الجزئي M كالاتي :

$$M = \{(x,y,z): x = x, y = y, z = y-2x\}$$

وبذلك كتبنا جميع المتغيرات بدلالة المتغيرين الحرين y,x بأخذ $x = 1$ و $y = o$ تكون $z = -2$ وبذلك نحصل على المتجه (1,0,-2) وعند اخذ $x = o$ و $y = 1$ تكون $z = 1$ فنحصل على المتجه (0,1,1) وبذلك حصلنا على متجهين $A_1 = (1,0,-2)$ ، $A_2 = (0,1,1)$ مستقلين خطياً ومولدين للفضاء M وذلك لانه اذا اخذنا اي متجه في M وليكن: $A = (x,y,z)$ بحيث $2x-y+z = o$ فإنه بالامكان كتابة A كتركيب خطي من A_1 و A_2 على النحو التالي :

$$A = xA_1 + yA_2$$

عليه تكون المجموعة $S = \{A_1, A_2\}$ قاعدة للفضاء الجزئي M .

مثال (9) :

جد قاعدة للفضاء الجزئي :

$$M = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a + b = c-2d = o\}$$

من الفضاء $P_3(R)$.

الحل: نلاحظ هنا ان $b = -a$ و $c = 2d$ عندئذ يمكننا وصف الفضاء الجزئي M كالاتي :

$$M = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : a = a, b = -a, c = 2d, d\}$$

كتبنا جميع المتغيرات بدلالة المتغيرين d,a عند التعويض : $d = o$, $a = 1$ ، تكون قيمة $b = -1$ و $c = o$ وبذلك نحصل على المتجه :

$$A_1 = 1 + (-1)x + 0.x^2 + 0.x^3 = 1-x$$

وعند التعويض : $d = 1$, $a = o$ ، تكون قيمة $b = o$ و $c = 2$ وبذلك نحصل على المتجه :

$$A_2 = o + o.x + 2.x^2 + 1.x^3 = 2x^2 + x^3$$

المتجهان A_1, A_2 مستقلان خطياً ومولدان للفضاء M وذلك لان اي متجه في M وليكن $A = a + bx + cx^2 + dx^3$ بحيث $b = -a,\ c = 2d$ يمكن كتابته كتركيب خطي من A_1 و A_2 على النحو التالي : $A = aA_1 + dA_2$

عليه تكون المجموعة $S = \{A_1 , A_2\}$ قاعدة للفضاء الجزئي M .

مثال (10) :

جد قاعدة للفضاء الجزئي $M = \{(x,y): y = ix\}$ من الفضاء C^2 على الحقل C ، ثم اعتبر M فضاءاً جزئياً من الفضاء C^2 على الحقل R وجد قاعدة له .

الحل: نلاحظ هنا وجود متغير واحد حر وهو x ، ففي حالة كون M فضاءاً جزئياً من الفضاء C^2 على الحقل C نعوض عن $x = 1$ ونحصل على متجه واحد $A = (1,i)$ الذي بدوره يكون قاعدة الى M . اما في حالة كون M فضاءاً جزئياً من الفضاء C^2 على الحقل R ، فنعوض مرة عن $x = 1$ ونحصل على $A_1 = (1,i)$ ومرة عن $x = i$ ونحصل على $A_2 = (i,-1)$ وبذلك تكون المجموعة $S = \{A_1, A_2\}$ عبارة عن قاعدة الى M ، والسبب هو انه في حالة كون الفضاء C^2 على الحقل R فإن معاملات التركيب الخطي تكون اعداداً حقيقية فلو اخذنا $A = (x,y) \in M$ بحيث $y = ix$ ولو كتبنا $x = a + ib$ لاتضح بأن $y = -b + ia$ وبهذه الحالة يمكننا كتابة :

$$A = a(1,i) + b(i,-1) = aA_1 + bA_2$$

اي ان المجموعة S تكون مولدة للفضاء الجزئي M من الفضاء C^2 على الحقل R . وبما انها مجموعة مستقلة خطياً فإنها ستكون قاعدة الى M .

بعد اعطاء عدد لابأس به من الامثلة على القواعد ، نود الان مناقشة الامور النظرية المتعلقة بهذا الموضوع ، حيث اننا لاحظنا في المبرهنة (1.8.1) ان اي فضاء منتهي البعد عنده قاعدة مكونة من عدد منتهي من المتجهات . السؤال هنا ، هل توجد قاعدتان تختلفان في عدد متجهاتهما؟ الاجابة بالنفي وسنذكر البرهان بعد ذكر بعض النتائج التي تؤدي اليه .

مبرهنة (1.8.2) :

لتكن $B=\{A_1,\ldots,A_n\}$ مجموعة مولدة للفضاء الجزئي M من الفضاء V على الحقل F ، ولتكن $S=\{C_1,\ldots,C_m\}$ مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات في M ، عندئذ يكون $m \leq n$.

البرهان :

لننظر الى المجموعة $B_1=\{C_1, A_1, \ldots, A_n\}$. بما ان $C_1 \in M$ والمجموعة $B=\{A_1,\ldots,A_n\}$ مجموعة مولدة للفضاء M ، فيكون المتجه C_1 معتمداً خطياً على المجموعة B وبذلك تكون المجموعة B_1 مرتبطة خطياً حسب المبرهنة (1.7.3). الان حسب المبرهنة (1.7.4) ، احد المتجهات في B_1 يمكن ان يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه. بإعادة ترقيم المتجهات $A_1,\ldots,A_n$ ان اقتضت الضرورة ، يمكننا ان نفترض ان المتجه A_n يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه . نحذف A_n ونلاحظ ان المجموعة $H_1=\{C_1, A_1,\ldots,A_{n-1}\}$ تولد الفضاء الجزئي M .

وللاسباب السابقة نفسها نلاحظ ان المجموعة $B_2=\{C_2,C_1,A_1,\ldots,A_{n-1}\}$ تكون مجموعة مرتبطة خطياً وبذلك يمكننا حذف المتجه A_{n-1} والحصول على المجموعة $H_2=\{C_2,C_1,A_1,\ldots,A_{n-2}\}$ المولدة للفضاء الجزئي M . نستمر هكذا ، ففي كل مرة ندخل متجه C_k ونحذف متجه A_j ، فإذا كانت $m > n$ فإننا سنصل للمجموعة $H_n=\{C_n,\ldots,C_1\}$ المولدة للفضاء الجزئي M . بذلك تكون المجموعة $B_{n+1}=\{C_{n+1},C_n,\ldots,C_1\}$ مرتبطة خطياً وهذا تناقص لان المجموعة $\{C_m,C_{n+1},C_n,\ldots,C_1\}$ مجموعة مستقلة بالفرض .

إذن $m \leq n$.

(و . هـ . م :)

مبرهنة (1.8.3) :

كل فضاء متجهات V منتهي البعد عنده قاعدة ، واي قاعدتين تحتويان على نفس العدد من المتجهات .

البرهان :

المبرهنة (1.8.1) وتعريف القاعدة الذي يليها ينصان على ان لكل فضاء متجهات منتهي البعد توجد قاعدة . لنفرض الآن ان

$$G=\{A_1,\ldots,A_n\},\ H=\{B_1,\ldots,B_m\}$$

قاعدتان الى V . بما ان H مجموعة مولدة الى V و G مجموعة مستقلة خطياً فيكون لدينا حسب المبرهنة (1.8.2) $n\leq m$.

بما ان G مجموعة مولدة الى V و H مجموعة مستقلة خطياً فيكون لدينا للاسباب نفسها $m\leq n$ بذلك يكون $m=n$.

(و . هـ . م .)

على ضوء المبرهنة (1.8.3) يمكننا ان نقدم التعريف التالي :

تعريف :

ليكن V فضاء متجهات منتهي البعد . يسمى عدد عناصر قاعدة V ببعد V ويرمز له بالرمز dim (V) .

$$\dim(V) = \text{dimension of } V$$

مثال (11) :

لاحظ ان بعد R^n في المثال (1) هو n اي ان

$$\dim(R^n) = n$$

مثال (12) :

ليكن V هو الفضاء C^n على الحقل C بذلك يكون

$$\dim V = n$$

اما اذا اعتبرنا V هو الفضاء C^n على الحقل R فإن

$$\dim V = 2n$$

قارن هذا المثال بالمثال رقم (7) .

مثال (13) :

$\dim (M_2(R)) = 4$. قارن هذا المثال بالمثال (5) .

مثال (14) :

$\dim (P_n(R)) = n + 1$ ، قارن هذا المثال بالمثال (6) .

ملاحظة :

على ضوء المبرهنة (1.8.2) لايمكن لاي فضاء ان يكون فضاءاً منتهي البعد ، اذا احتوى على مجموعة لانهائية من المتجهات المستقلة خطياً .
لتطبيق هذه الفكرة نورد المثال التالي :

مثال (15) :

لقد لاحظنا في مثال (2) ان الفضاء $P_\infty(R)$ ليس فضاءاً منتهي البعد .
نلاحظ هذا من خلال الملاحظة اعلاه . متعددات الحدود

$$A_1(x) = x,\ A_2(x) = x^2,\ \ldots,\ A_n(x) = x^n, \ldots$$

تكوّن مجموعة مستقلة خطياً ولانهائية وبذلك وحسب الملاحظة اعلاه لايمكن للفضاء $P_\infty(R)$ المحتوى على تلك المتعددات بأن يكون منتهي البعد .

مبرهنة (1.8.4) :

لتكن $B = \{A_1, \ldots, A_n\}$ قاعدة لفضاء المتجهات المنتهي البعد V . ان اي متجه $A \in V$ يمكن كتابته بطريقة واحدة وواحدة فقط كتركيب خطي :

$$A = a_1 A_1 + \ldots + a_n A_n$$

البرهان :

بما ان B قاعدة الى V فإن المتجه $A \in V$ يكون تركيباً خطياً لعناصرها $A_1, \ldots, A_n$ ولنفرض انه بالصيغة :

$$A = a_1A_1 + \ldots + a_nA_n$$
$$= a_1'A_1 + \ldots + a_n'A_n$$

اي ان A كتب بطريقتين مختلفتين . بذلك نحصل على

$$(a_1 - a_1')\, A_1 + \ldots + (a_n - a_n')\, A_n = o$$

بما ان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_n\}$ مستقلة خطياً ، فعليه يكون :

$$a_1 - a_1' = \ldots = a_n - a_n' = o$$

من هذا نستنتج على ان $a_1 = a_1', \ldots, a_n = a_n'$ اي ان A يكتب بطريقة واحدة فقط كتركيب خطي من متجهات القاعدة B .

(و . هـ . م .)

مبرهنة (1.8.5) :

ليكن V فضاء متجهات منتهي البعد ولتكن $A_1, \ldots, A_m$ متجهات مستقلة خطياً في V . توجد متجهات $B_1, \ldots, B_n$ في V بحيث ان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$ تكون قاعدة الى V .

البرهان :

اذا كان $[A_1, \ldots, A_m] = V$ ، اي ان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_m\}$ تولد V فأنها ستكون قاعدة الى V ولا يوجد شيء يبرهن . بخلاف ذلك فإنه يوجد متجه $B_1 \in V$ لايمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات $A_1, \ldots, A_m$.

بذلك نستنتج على ان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_m, B_1\}$ تكون مجموعة مستقلة خطياً لانه لو كانت مرتبطة خطياً لامكن لاحد متجهاتها ان يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه (مبرهنة 1.7.4) .

هذا المتجه لايمكن ان يكون A_k $(1 \leq k \leq m)$ لان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_m\}$

مستقلة خطياً، ولايمكن ان يكون B_1 وذلك بالفرض. الان اذا كانت المجموعة $\{A_1, ..., A_m, B_1\}$ مولّدة الى V فإن البرهان قد انتهى، بخلافه يوجد متجه $B_2 \in V$ لايمكن ان يكتب كتركيب خطي من المتجهات $A_1, ..., A_m, B_1$ وبذلك نستنتج بأن المجموعة $\{A_1, ..., A_m, B_1, B_2\}$ مستقلة خطياً للاسباب السابقة نفسها وهكذا. فأذا كانت مولدة انتهى البرهان وان لم تكن فنضيف متجهاً جديداً. بما ان V فضاء منتهي البعد، فإن هذه العملية لابد لها من نهاية ولابد ان نصل الى مجموعة مولدة بعد اضافة عدد محدود من المتجهات $B_1, ..., B_n$.

(و . هـ . م.)

ملاحظة :

المبرهنة اعلاه تنص على انه بإمكان اي مجموعة جزيئة مستقلة خطياً من فضاء متجهات منتهي البعد ان تكون مجموعة جزئية من قاعدة لذلك الفضاء. بهذه الحالة نقول بأن تلك المجموعة الجزئية قد وسعت الى قاعدة لذلك الفضاء.

مثال (16) :

وسّع المجموعة $\{(1,2)\}$ الجزئية من R^2 الى قاعدة الى R^2.

الحل: بما ان $\dim(R^2) = 2$. إذن اي قاعدة الى R^2 يجب ان تحتوي على متجهين. نلاحظ بأن المتجه (1,0) لايمكن ان يكتب كتركيب خطي من المتجه (1,2). بذلك تكون المجموعة $\{(1,2), (1,0)\}$ قاعدة الى R^2. المجموعة $\{(1,2), (3,5)\}$ تكون قاعدة أخرى وهكذا.

مثال (17) :

جد قاعدة للفضاء $P_3(R)$ على الحقل R تحتوي على مجموعة المتجهات $\{x + 1, 2x^2\}$ المستقلة خطياً.

الحل: يجب اضافة متجهين للمجموعة اعلاه وذلك لان اي قاعدة الى $P_3(R)$ تحتوي

على اربعة متجهات بسبب ان $4 = \dim(P_3(R))$. للسهولة نتبع الخطوات التالية في جميع المسائل من هذا النوع .

الخطوة الاولى : نضيف متجهات القاعدة الطبيعية للمجموعة المعطاة . بهذه الحالة يكون لدينا : $x+1, 2x^2, 1, x, x^2, x^3$.

الخطوة الثانية : نحذف ابتداء من اليسار كل متجه يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه .

المتجه 1 لايمكن ان يكتب كتركيب خطي من المتجهات $x+1,$ $2x^2$

بما ان : $x = 1.(x+1) + 0.(2x^2) + (-1).1$

نحذف x وننظر للمجموعة$\{x+1, 2x^2, 1, x^2, x^3\}$هذه المجموعة مستقلة خطياً ومولدة للفضاء $P_3(R)$ وبذلك تكون قاعدة محتوية على المجموعة المستقلة $\{x+1, 2x^2\}$.

نورد الآن بعض النتائج للمبرهنات التي ذكرناها .

نتيجة (1.8.6) :

في اي فضاء متجهات ذي بعد n ، اي مجموعة جزئية تحتوي على $n+1$ من المتجهات تكون مرتبطة خطياً .

البرهان :

لو كانت المجموعة الجزئية مستقلة خطياً لاصبح بالامكان وحسب (مبرهنة 1.8.5) ايجاد قاعدة تحتوي عليها وبذلك يكون عدد متجهات تلك القاعدة اكبر او يساوي $n+1$ ، اي ان بعد الفضاء يكون اكبر او مساوياً الى $n+1$ ، وهذا تناقض .

(و . هـ . م .)

نتيجة (1.8.7) :

اذا كان M فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V فإن $\dim M \leq \dim V$ ، بالاضافة الى ذلك فإنه اذا كان $\dim M = \dim V$ فأن $M = V$.

البرهان :

ان اي قاعدة الى M تكون مستقلة خطياً وبذلك تكون جزء من قاعدة الى V ، وعليه يكون عدد متجهات تلك القاعدة الى V اكبر او مساوي الى عدد متجهات قاعدة M نستنتج من هذا على ان $\dim M \leq \dim V$.

اذا كان $\dim M = \dim V$ فإن اي قاعدة الى M تكون قاعدة الى V وبذلك يكون $M = V$.

(و . هـ . م .)

نتيجة (1.8.8) :

اذا كان V فضاء متجهات ذا بعد n فإن :

1 ــ اي مجموعة جزئية من V متكونة من n من المتجهات تكون قاعدة الى V اذا كانت مستقلة خطياً .

2 ــ اي مجموعة جزئية من V متكونة من n من المتجهات تكون قاعدة الى V ، اذا كانت تولد V .

البرهان :

1 ــ لتكن $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$ مجموعة جزئية من V مستقلة خطياً . حسب المبرهنة (1.8.5) ، ان لم تكن S قاعدة فإنه توجد متجهات $B_1, \ldots, B_m$ بحيث ان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ تكون قاعدة الى V . لكن بهذه الحالة يكون $\dim V = m + n \neq n$ وهذا تناقض .

2 ــ لتكن $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$ مجموعة جزئية تولد V ، حسب المبرهنة (1.8.1) ، توجد مجموعة جزئية $T \subseteq S$ بحيث ان T مستقلة خطياً و

لكن $V=[S]=[T]$ $\dim[T] \lneq \dim[S]$ وبهذا نحصل على تناقض في حالة عدم كون S قاعدة الى V .

(و . هـ . م .)

ملاحظـة :

النتيجة اعلاه مفيدة لانه اذا عرفنا بعد الفضاء فيكفي للمجموعة الجزئية المتكونة من عدد من المتجهات مساوي الى بعد الفضاء بأن تكون قاعدة اذا كانت مستقلة خطياً او مولدة لذلك الفضاء .

اذا كان كل من M و N فضاءاً جزئياً من فضاء المتجهات V فإنه بالامكان تعريف الفضاء الجزئي $M+N$ (راجع البند 1.5) . المبرهنة التالية تحسب لنا بعد $M+N$.

مبرهنة (1.8.9) :

$$\dim(M+N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N)$$

البرهان :

لتكن $\{A_1,\ldots,A_r\}$ قاعدة الى $M \cap N$ ، على فرض ان $M \cap N \neq \{o\}$.

بما ان $M \cap N \subset M$ و $M \cap N \subset N$ ، فعليه يمكننا ان نوسع المجموعة $\{A_1,\ldots,A_r\}$، الى قاعدة $\{A_1,\ldots,A_r,B_1,\ldots,B_s\}$ الى M وقاعدة $\{A_1,\ldots,A_r,C_1,\ldots,C_t\}$ الى N وذلك حسب المبرهنة (1.8.5) . بذلك يكون لدينا

$$\dim(M \cap N) = r, \ \dim M = r+s, \ \dim N = r+t$$

لكي نثبت المبرهنة بقى ان نبرهن على ان $\dim(M+N) = r+s+t$ لهذا الغرض ، ننظر للمجموعة $\{A_1,\ldots,A_r,B_1,\ldots,B_s,C_1,\ldots,C_t\}$ ونحاول ان نثبت بأنها قاعدة للفضاء الجزئي $M+N$ وبما ان عدد متجهاتها يساوي $r+s+t$ فعليه يكون $\dim(M+N) = r+s+t$ وبذلك يكتمل البرهان في حالة

$M\cap N=\{O\}$. نبرهن اولاً ان المجموعة اعلاه مجموعة مولدة الى $M+N$. لهذا الغرض نأخذ اي متجه $A\in M+N$ ونكتب A بالصيغة $A=B+C$ ، حيث $B\in M$ و $C\in N$. بما ان المجموعة $\{A_1,\dots,A_r,B_1,\dots,B_s\}$ تكون قاعدة الى M فعليه توجد اعداد قياسية $x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_s$ بحيث ان المتجه $B\in M$ يكتب كتركيب خطي على الشكل :

$$B=x_1A_1+\dots+x_1A_r+y_1B_1+\dots.+y_sB_s$$

بما ان المجموعة $\{A_1,\dots,A_r,C_1,\dots,C_t\}$ تكون قاعدة الى N فعليه توجد اعداد قياسية $z_1,\dots,z_r,w_1,\dots,w_t$ بحيث ان المتجه $C\in N$ يكتب كتركيب خطي على الشكل :

$$C=z_1A_1+\dots+z_rA_r+w_1C_1+\dots+w_tC_t$$

بهذا يكون لدينا :

$$A=B+C=(x_1+z_1)A_1+\dots+(x_r+z_r)A_r+y_1B_1+\dots+y_sB_s+ w_1C_1+\dots+\dots+w_tC_t$$

اي ان A أمكن كتابته كتركيب خطي من متجهات المجموعة $\{A_1,\dots,A_r,B_1,\dots,B_s,C_1,\dots,C_t\}$ وهذا يعني انها مجموعة مولدة للفضاء الجزئي $M+N$. نبرهن الان على ان المجموعة $\{A_1,..A_r,B_1,\dots,B_s,C_1,\dots,C_t\}$ مستقلة خطياً .

ليكن :

$$x_1A_1+\dots+x_rA_r+y_1B_1+\dots+y_sB_s+z_1C_1+\dots+\dots+z_tC_t=O$$

تركيباً خطياً مساوياً للصفر . المطلوب برهانه هنا ان جميع الاعداد القياسية $x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_s,z_1,\dots,z_t$ ، تكون مساوية للصفر . بالامكان كتابة المعادلة اعلاه بالصيغة :

$$x_1A_1+\dots+x_rA_r+y_1B_1+\dots+y_sB_s=-z_1C_1-z_tC_t$$

الطرف الايسر للمعادلة اعلاه عبارة عن متجه في M وذلك لانه تركيب خطي من متجهات قاعدة M وهو يساوي الطرف الايمن الذي يعتبر متجهاً في N لانه تركيب

خطي من متجهات منتمية الى N . بذلك ينتمي كلا الطرفان الى كل من M و N ، اي الى التقاطع $M \cap N$. بهذه الحالة يمكن كتابة كل من الطرفين كتركيب خطي : $w_1A_1 + \ldots + w_rA_r$ من متجهات قاعدة $M \cap N$ ، وبذلك نحصل على

$$x_1A_1 + \ldots + x_rA_r + y_1B_1 + \ldots + y_sB_s = w_1A_1 + \ldots + w_rA_r$$

$$-z_1C_1 - \ldots - z_tC_t = w_1A_1 + \ldots + w_rA_r$$

بالامكان كتابة المعادلتين اعلاه بالصيغة التالية :

$$(x_1 - w_1)A_1 + \ldots + (x_r - w_r)A_r + y_1B_1 + \ldots + y_sB_s = O$$

$$w_1A_1 + \ldots + w_rA_r + z_1C_1 + \ldots + z_tC_t = O$$

المعادلتان اعلاه تمثلان تركيبين خطيين مساويين للصفر لمجموعتي متجهات مستقلتين خطياً ، بذلك نستنتج على ان جميع المعاملات تكون مساوية للصفر ، اي ان :

$$x_1 - w_1 = o, \ldots, x_r - w_r = o, y_1 = o, \ldots, y_s = o, w_1 = o, \ldots, w_r = o,$$
$$z_1 = o, \ldots, z_t = o$$

هذا يعني ان $x_1 = 0, \ldots, x_r = o, y_1 = o, \ldots, y_s = o, z_1 = o, \ldots, z_t = o$

وبذلك تكون المجموعة $\{A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_s, C_1, \ldots, C_t\}$ مستقلة خطياً . في حالة كون $M \cap N = \{o\}$ فإثبات المبرهنة يسير على النحو التالي :

نفرض ان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_m\}$ تكون قاعدة الى M والمجموعة $\{B_1, \ldots, B_n\}$ تكون قاعدة الى N ونحاول ان نبرهن على ان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$ تكون قاعدة الى $M + N = M \oplus N$. المجموعة اعلاه مجموعة مولّدة الى $M + N$ وذلك يمكن برهنته بسهولة وبطريقة مماثلة للحالة الاولى $(M \cap N \neq \{o\})$ للبرهنة على ان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$ مستقلة خطياً . نأخذ تركيباً خطياً مساوياً للصفر :

$$x_1A_1 + \ldots + x_mA_m + y_1B_1 + \ldots + y_nB_n = O$$

ونكتبه بالصيغة :

$$x_1A_1 + \ldots + x_mA_m = (-y_1)B_1 + \ldots + (-y_n)B_n$$

الطرف الايسر متجه في M ويساوي الطرف الايمن الذي بدوره يكون متجهاً في N وبالتالي ينتمي كلا الطرفين الى كل من M و N اي الى التقاطع $M \cap N$. لكن $M \cap N = \{O\}$ بالفرض. إذن

$$x_1A_1 + \dots + x_mA_m = O$$

$$(-y_1)B_1 + \dots + (-y_n)B_n = O$$

بما ان المجموعتين $\{A_1, \dots, A_m\}$، $\{B_1, \dots, B_n\}$ مستقلتان خطياً، فعليه نستنتج :

$$x_1 = o, \dots, x_m = o, y_1 = o, \dots, y_n = o$$

بذلك تكون المجموعة $\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\}$ مستقلة خطياً. هذا يثبت ان $\dim(M \oplus N) = m + n$ وهذا يتفق مع النتيجة العامة في حالة كون $M \cap N = \{O\}$ أي ان $\dim(M \cap N) = o$.

(و . هـ . م .)

مثال (18) :

جد بعد الفضاء الجزئي $M+N$ من R^3 اذا علمت ان $M = \{(x,y,z): x-2y+z = o\}$، $N = \{(x, y, z): 2x + 5y = o\}$ ثم برهن على ان $M + N = R^3$.

الحل: بتطبيق المبرهنة (1.8.9) نلاحظ ان

$$\dim(M+N) = \dim M + \dim N - \dim(M \cap N)$$

لذلك نحاول ان نجد ابعاد الفضاءات الجزئية $M, N, M \cap N$. بالامكان وصف M, N بالصيغة التالية :

$$M = \{(x,y,z): x = x, y = y, z = -x + 2y\}$$

$$N = \{(x,y,z): x = x, y = (-2/5)x, z = z\}$$

وكما وضحنا في الأمثلة السابقة فإنه بالامكان اختيار المجموعتين :

$C = \{(1, -2/5, 0), (0,0,1)\}$ ، $B = \{(1,0,-1), (0,1,2)\}$

كقواعد الى كل من M و N على الترتيب . بذلك يكون لدينا :

$$\dim N = 2 , \dim M = 2$$

لحساب $M \cap N$ نفترض ان المتجه $(x,y,z) \in M \cap N$ بذلك يكون لدينا $z = -x + 2y$ و $y = (-2/5)x$ وعند التعويض نحصل على :

$$z = -x + 2(-2/5)x = (-9/5)x$$

عندئذ يمكن وصف التقاطع بالصيغة :

$$M \cap N = \{(x,y,z) : x = x,\ y = (-2/5)x,\ z = (-9/5)x\}$$

وبهذا يكون لدينا متغير واحد حر وهو x وبأختيار القيمة $x = 5$ نحصل على المتجه $(5, -2, -9)$ الذي بدوره يكون قاعدة الى $M \cap N$.

هذا يعني ان $\dim (M \cap N) = 1$. المعادلة المذكورة في المبرهنة (1.8.9) تنتج :

$$\dim (M + N) = 2 + 2 - 1 = 3$$

اي أن $\dim (M + N) = \dim (R^3)$

وبما ان $M + N$ فضاء جزئي من R^3 فعليه وحسب نتيجة (1.8.7) يكون :
$M + N = R^3$.

تمارين (1.8)

1 ـــ اي من المجموعات الجزئية التالية تكون قاعدة الى R^3 .

$$E = \{(-1,2,0), (0,1,0), (1,2,3)\}$$
$$F = \{(1,2,0), (0,5,7), (-1,1,3)\}$$
$$G = \{(-1,1,4), (0,2,0), (1,1,1), (0,2,5)\}$$
$$H = \{(0,5,7), (-1,2,-3), (-2,9,1)\}$$

2 ـــ اي من المجموعات الجزئية التالية تكون قاعدة للفضاء $P_2(R)$ على الحقل R.

$E = \{-1, 1-x, -2x^2\}$
$F = \{1, (x-2), (x-2)(x+1)\}$
$G = \{1+x-x^2, 2-x+3x^2, 1-2x+4x^2\}$
$H = \{1+x+x^2, x^2, x^2-2\}$

3 ـــ جد قاعدة لفضاء المصفوفات 2×2, $M_2(C)$ على الحقل C ، ثم اعتبر $M_2(C)$ فضاءاً على حقل الاعداد الحقيقية R وجد قاعدة له.

4 ـــ في الفضاء C^4 على الحقل C ، برهن على ان كل من المجموعتين :

$M = \{(a,o,o,b): a,b \in C\}$
$N = \{(c,o,d,o): c,d \in C\}$

تكون فضاءاً جزئياً ثم جد قاعدة له. جد قاعدة الى كل من $M \cap N$ و $M+N$ ثم حقق معادلة البعد في (1.8.9).

5 ـــ جد قاعدة الى كل من الفضاءات الجزئية التالية من R^3.

$M = \{(x,y,z): x+y = o\}$
$N = \{(x,y,z): 2x+y-z = o\}$
$V = \{(x,y,z): x=o, y-2z = o\}$
$W = \{(x,y,z): x = y-3z\}$

6 ـــ جد قاعدة الى كل من الفضاءات الجزئية التالية من $P_3(R)$.

$M = \{a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3: 2a_1 + a_2 - a_3 = o\}$
$N = \{P(x): d/dx\ P(x) = o\}$
$V = \{P(x): P(-x) = -P(x)\}$
$W = \{P(x): P(o) = o\}$

$Z = \{P(x): P(x) = a_o + a_2x^2\}$.

7 ـــ جد بعد جميع الفضاءات الجزئية في التمارين (5) ، (6) .

8 ـــ ليكن كل من $M = \{(a,o,o)\}$ ، $N = \{(o,b,b)\}$ فضاءاً جزئياً من R^3 . جد قاعدة الى $M + N$.

9 ـــ تحت اي شرط على العدد الحقيقي a تكون مجموعة المتجهات $(o,1,a)$ ، $(1,a,o)$ ، $(1,o,a)$ مرتبطة خطياً .

10 ـــ اعتبر V هو الفضاء الجزئي المولد من قبل المتجهات :

$$A_1(x) = 2, A_2(x) = Sin^2x, A_3(x) = Cos2x$$

وذلك في فضاء الدوال الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقي بأكمله .

(أ) اثبت ان $S = \{A_1, A_2, A_3\}$ ليست قاعدة الى V .

(ب) جد قاعدة للفضاء الجزئي V .

11 ـــ اعتبر $\{A_1, A_2, A_3\}$ قاعدة للفضاء V ثم برهن على ان $\{B_1, B_2, B_3\}$ ايضاً قاعدة ، حيث :

$$B_1 = A_1 , B_2 = A_1 + A_2 , B_3 = A_1 + A_2 + A_3 .$$

12 ـــ برهن على ان : $\dim(M_{mn}(R)) = mn$ ، $\dim(M_n(C)) = n^2$ عندما $M_n(C)$ يكون فضاء متجهات على الحقل C . و $\dim(M_n(C)) = 2n^2$ عندما $M_n(C)$ يكون فضاء متجهات على الحقل R .

13 ـــ اذا كان : $M = \{(x,y,z): x + 2y - z = o\}$ فضاءا جزئيا من R^3 ، فجد فضاءاً جزئياً N بحيث يكون $M \cap N = \{O\}$ و $M + N = R^3$.

(ارشاد : اختار قاعدة الى M ثم وسعها الى قاعدة الى R^3) .

(1.9) الاحداثيات وتغيير القواعد

Coordinates and change of bases

اذا كان V فضاء متجهات منتهي البعد وعلى الحقل F، واذا كانت $S=\{A_1, \ldots, A_n\}$ قاعدة الى V فإن اي متجه $A \in V$ يمكن كتابته بطريقة واحدة فقط كتركيب خطي من متجهات تلك القاعدة (مبرهنة 1.8.4) . اي ان $A=x_1A_1+\ldots+x_nA_n$، حيث $x_1,\ldots,x_n \in F$ اعداد قياسية وحيدة .

من الان فصاعداً، سوف نهتم بترتيب المتجهات في القاعدة، اي اننا سنتعامل مع قواعد مرتبه، لكن لسهولة التعبير، سنطلق فقط اسم قاعدة ويفهم من ذلك انها قاعدة مرتبة . فمثلاً القاعدة $\{A_1 = (1,0), A_2 = (0,1)\}$ للفضاء R^2 سوف تختلف عن القاعدة $\{A_1 = (0,1), A_2 = (1,0)\}$ على الرغم من كونهما مجموعتين متساويتين، لكن الاختلاف هنا بترتيب المتجهات .

نرجع الان للفضاء V اعلاه، ونأخذ $A \in V$ اي متجه .

تعريف :

بمتجه احداثيات $A \in V$ بالنسبة للقاعدة $S=\{A_1,\ldots,A_n\}$، نقصد المتجه $X=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$، حيث ان $x_1,\ldots,x_n \in F$ هي الاعداد القياسية الوحيدة التي تحقق $A=x_1A_1+\ldots+x_nA_n$.

مثال (1) :

في الفضاء R^2، جد متجه احداثيات المتجه $A=(5,6)$ بالنسبة للقاعدة الطبيعية ثم بالنسبة للقاعدة $S=\{A_1 = (1,2), A_2 = (-1,4)\}$.

الحل : ان القاعدة الطبيعية الى R^2 هي $\{A_1 = (1,0), A_2 = (0,1)\}$.

بما ان : $A = (5,6) = 5\,(1,0) + 6\,(0,1)$

$= 5A_1 + 6A_2$

اذن يكون متجه احداثيات $A = (5,6)$ بالنسبة للقاعدة الطبيعية مساوياً للمتجه نفسه ، اي $X = (5,6)$.

لايجاد متجه احداثيات $A = (5,6)$ بالنسبة للقاعدة S اعلاه ، نكتب :

$$A = (5,6) = x_1A_1 + x_2A_2$$
$$= x_1 (1,2) + x_2 (-1,4)$$
$$= (x_1-x_2, 2x_1 + 4x_2)$$

بعد حل المعادلات نحصل على $x_1 = 13/3 , x_2 = -2/3$.

هذا يعني ان متجه احداثيات $A = (5,6)$ بالنسبة للقاعدة S هو $X = (13/3,-2/3)$.

مثال (2) :

في الفضاء $P_2(R)$ ، جد متجه احداثيات المتجه $A = 1 - x^2$ بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1 = 3, A_2 = -1 + x , A_3 = x^2\}$.

الحل : نكتب :

$$A = 1-x^2 = a(3) + b(-1+x) + c (x^2)$$
$$= (3a-b) + bx + cx^2$$

فنحصل على المعادلات :

$$3a-b = 1, b = o, c = -1$$

اي $a = 1/3, b = o, c = -1$

عندئذ يكون متجه احداثيات المتجه $A = 1 - x^2$ بالنسبة للقاعدة S هو $X = (1/3 , 0, -1)$.

لقد لاحظنا ان متجه احداثيات اي متجه يعتمد كلياً على المتجه والقاعدة ، فأذا تغيرت القاعدة ، تغير متجه الاحداثيات . سوف ندرس العلاقة بين احداثيات متجه بالنسبة لقاعدتين مختلفتين ، لكن قبل ذكر العلاقة بصورة عامة سنحاول دراستها من خلال المثال التالي .

مثال (3) :

اذا كانت $S = \{A_1, A_2\}$ قاعدة الى R^2 و $S^* = \{A^*_1, A^*_2\}$ قاعدة جديدة الى R^2 بحيث ان

$A_1 = aA^*_1 + bA^*_2$ ، $A_2 = cA^*_1 + dA^*_2$. اذا كان $X = (x, y)$ هو متجه احداثيات المتجه $A \in R^2$ بالنسبة للقاعدة S فجد $X^* = (x^*, y^*)$ ، متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة الجديدة S^* .

الحل :

$$\begin{aligned} A &= xA_1 + yA_2 \\ &= x(aA^*_1 + bA^*_2) + y(cA^*_1 + dA^*_2) \\ &= (xa + yc)A^*_1 + (xb + yd)A^*_2 \end{aligned}$$

أذن : $x^* = xa + yc, y^* = xb + yd$

اي ان :

$$\begin{aligned} X^* = (x^*, y^*) &= (xa + yc, xb + yd) \\ &= (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

لو وضعنا : $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، فإن العلاقة اعلاه تصبح

$$X^* = XP$$

الصف الاول للمصفوفة P هو متجه احداثيات A_1 بالنسبة للقاعدة الجديدة . والصف الثاني هو متجه احداثيات A_2 بالنسبة للقاعدة الجديدة .

سنسمي المصفوفة P اعلاه مصفوفة الانتقال من القاعدة S الى القاعدة S^* .

بصورة عامة، اذا كانت $S=\{A_1,\ldots, A_n\}$ قاعدة الى V و $S^\star=\{A^\star_1,\ldots,A^\star_n\}$ قاعدة جديدة الى V فأنه بالامكان كتابة كل متجه في S كتركيب خطي من متجهات $S^\star$ وعلى النحو التالي :

$$A_1 = P_{11}A^\star_1 + P_{12}A^\star_2 + \ldots + P_{1n}A^\star_n$$

$$A_2 = P_{21}A^\star_1 + P_{22}A^\star_2 + \ldots + P_{2n}A^\star_n$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$A_n = P_{n1}A^\star_1 + P_{n2}A^\star_2 + \ldots + P_{nn}A^\star_n$$

عندئذ تسمى المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2n} \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة الانتقال من القاعدة S الى القاعدة $S^\star$

لاحظ ان الصف k للمصفوفة P هو متجه احداثيات $A_k \in S$ بالنسبة للقاعدة الجديدة $S^\star$. اي ان مصفوفة الانتقال من S الى $S^\star$ هي المصفوفة التي تنتج من كتابة متجهات S بدلالة متجهات $S^\star$ على الترتيب .

مثال (4) :

جد مصفوفة الانتقال من القاعدة $S=\{A_1 = (2,1)\ ,\ A_2 = (0,3)\}$ الى القاعدة $S^\star=\{A^\star_1 = (-1,0),\ A^\star_2 = (3,3)\}$.

الحل : نكتب

$$A_1 = (2,1) = p_{11}A_1^\star + p_{12}A_2^\star$$
$$A_2 = (0,3) = p_{21}A_1^\star + p_{22}A_2^\star$$

بذلك نحصل على :

$$(2,1) = p_{11}(-1,0) + p_{12}(3,3) = (-p_{11} + 3p_{12}, 3p_{12})$$

$$(0,3) = p_{21}(-1,0) + p_{22}(3,3) = (-p_{21} + 3p_{22}, 3p_{22})$$

اي ان

$$-p_{11} + 3p_{12} = 2, \; 3p_{12} = 1$$

$$-p_{21} + 3p_{22} = o, \; 3p_{22} = 3$$

والحل يكون

$$p_{11} = -1, p_{12} = 1/3, p_{21} = 3, p_{22} = 1$$

عندئذ تكون مصفوفة الانتقال من القاعدة S الى القاعدة $S^\star$ هي

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

مبرهنة (1.9.1) :

اذا كانت S قاعدة لفضاء المتجهات المنتهي البعد V و $S^\star$ قاعدة جديدة الى V بحيث ان مصفوفة الانتقال من S الى $S^\star$ هي P ، واذا كان X هو متجه احداثيات المتجه $A \in V$ بالنسبة للقاعدة S فإن $X^\star = XP$ يكون متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة $S^\star$.

البرهان :

لنفرض ان بعد $V = n$ ولنفرض ان $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$ و $S^\star = \{A^\star_1, \ldots, A^\star_n\}$. بما ان $X = (x_1, \ldots, x_n)$ هو متجه احداثيات $A \in V$ بالنسبة للقاعدة S . اذن

$$A = x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n$$

بما ان $P = (p_{ij})$ هي مصفوفة الانتقال من S الى $S^\star$. اذن

$$A_1 = p_{11}A_1^\star + \dots + p_{1n}A_n^\star$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$A_n = p_{n1}A_1^\star + \dots + p_{nn}A_n^\star$$

بالتعويض نحصل على

$$A = x_1A_1 + \dots + x_nA_n$$

$$= x_1(p_{11}A_1^\star + \dots + p_{1n}A_n^\star) + \dots + x_n(p_{n1}A^\star_1 + \dots + p_{nn}A^\star_n)$$

$$= (x_1p_{11} + x_2p_{21} + \dots + x_np_{n1})A_1^\star + \dots + (x_1p_{1n} + x_2p_{2n} + \dots + x_np_{nn})A_n^\star$$

اذا كان $X^\star = (x_1^\star, \dots, x_n^\star)$ متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة $S^\star$ فنحصل على العلاقات التالية.

$$x^\star_1 = x_1p_{11} + x_2p_{21} + \dots + x_np_{n1}$$
$$x^\star_2 = x_1p_{12} + x_2p_{22} + \dots + x_np_{n2}$$
$$\vdots$$
$$x^\star_n = x_1p_{1n} + x_2p_{2n} + \dots + x_np_{nn}$$

بمراجعة ضرب المصفوفات، يمكن كتابة المعادلات اعلاه بالصيغة

$$(x_1^\star, x_2^\star, \dots, x_n^\star) = (x_1, x_2, \dots, x_n)\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

اي ان: $X^\star = XP$.

(و . هـ . م .)

مثال (5) :

اذا علمت بأن $X = (1,2,-1)$ هو متجه احداثيات المتجه A بالنسبة للقاعدة $S = \{1/2, -x, 2x^2\}$ الى $P_2(R)$ فجد A . واذا علمت بأن

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة الانتقال من S الى القاعدة
$S^\star = \{A^\star_1, A^\star_2, A^\star_3\}$ فجد متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة $S^\star$.

الحل:

$$A = (1)(1/2) + (2)(-x) + (-1)(2x^2)$$
$$= 1/2 - 2x - 2x^2$$

ليكن $X^\star = (a^\star_1, a^\star_2, a^\star_3)$ متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة $S^\star$ اذن .

$$X^\star = XP$$

$$= (1, 2, -1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (4,2,-1)$$

مثال (6) :

اذا علمت بأن مصفوفة الانتقال من القاعدة
$S = \{A_1 = (2,1), A_2 = (0,3)\}$ الى R^2 الى القاعدة $S^\star = \{A^\star_1, A^\star_2\}$ هي

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

فجد A^*_1, A^*_2, ثم جد مصفوفة الانتقال من S^* الى S .

الحل: من تعريف مصفوفة الانتقال نحصل على

$$A_1 = (2,1) = 1/\sqrt{5}\, A^*_1 + 2/\sqrt{5}\, A^*_2 \qquad \text{.........(1)}$$

$$A_2 = (0,3) = -2/\sqrt{5}\, A^*_1 + 1/\sqrt{5}\, A^*_2 \qquad \text{.........(2)}$$

بضرب المعادلة الاولى في 2 وجمعها مع المعادلة الثانية ، نحصل على

$$(4,5) = 5/\sqrt{5}\, A^*_2 = \sqrt{5}\, A^*_2$$

اذن . $A^*_2 = (4/\sqrt{5}, \quad 1/\sqrt{5})$

من المعادلة الاولى نحصل على

$$1/\sqrt{5}\, A^*_1 = (2,1) - 2/\sqrt{5}\, A^*_2$$
$$= (2,1) - 2/\sqrt{5}\,(4/\sqrt{5}, \quad 1/\sqrt{5})$$
$$= (2,1) - (8/5, 2/5) = (2/5, 3/5)$$

اذن : $A^*_1 = (2/\sqrt{5}, \quad 3/\sqrt{5})$

لنفرض ان

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة الانتقال من القاعدة S^* الى القاعدة S ، فيكون لدينا

$$A^*_1 = q_{11} A_1 + q_{12} A_2$$
$$A^*_2 = q_{21} A_1 + q_{22} A_2$$

اي ان : $(2/\sqrt{5}, \quad 3/\sqrt{5}) = q_{11}(2,1) + q_{12}(0,3)$.

$$(4/\sqrt{5}, \quad 1/\sqrt{5}) = q_{21}(2,1) + q_{22}(0,3)$$

وبحل المعادلات اعلاه نحصل على

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

لاحظ ان $Q = P^{-1}$

مبرهنة (1.9.2) :

اذا كانت

$S=\{A_1,\ldots, A_n\}$ ، $S^\star = \{A^\star_1,\ldots, A^\star_n\}$ ،
$S^{\star\star} = \{A^{\star\star}_1,\ldots, A^{\star\star}_n\}$ قواعد للفضاء V وكانت P هي مصفوفة الانتقال من S الى S^* و Q هي مصفوفة الانتقال من S^* الى S^{**} فإن PQ تكون مصفوفة الانتقال من S الى S^{**}.

البرهان :

تمرين بسيط بضرب المصفوفات ويترك للقارىء.

نتيجة (1.9.3) :

اذا كانت P مصفوفة الانتقال من قاعدة S الى قاعدة $S^\star$ فإن P^{-1} تكون مصفوفة الانتقال من $S^\star$ الى S.

البرهان :

ان مصفوفة الانتقال من S الى S هي المصفوفة المحايدة. فإذا كانت Q مصفوفة الانتقال من $S^\star$ الى S فإن PQ. تكون مصفوفة الانتقال من S الى S، اي

$$PQ = I$$

وبذلك يكون $Q = P^{-1}$.

(و . هـ . م .)

مثال (7) :

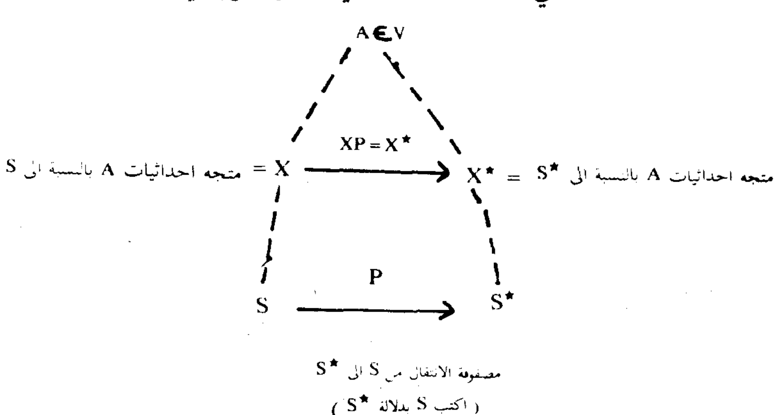
جد المتجه A في $P_2(R)$ الذي متجه احداثياته بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1 = -1, A_2 = 1+x, A_3 = 2x^2\}$ ، هو المتجه $X = (-2,0,1)$.

الحل : من تعريف متجه الاحداثيات نحصل على :

$$\begin{aligned} A &= (-2)\,A_1 + (0)\,A_2 + (1)\,A_3 \\ &= (-2)(-1) + (0)(1+x) + (1)(2x^2) \\ &= -2 + 2x^2 \end{aligned}$$

ملاحظة :

المخطط التالي يساعد الطالب في تذكر ماورد في مبرهنة (1.9.1)



تماريـــن (1,9)

1 ـــ جد متجه احداثيات كل من المتجهات التالية في R^2 وذلك بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1 = (2,-1), A_2 = (3,0)\}$.

$A = (2,-1), B = (0,0), C = (0,1), D = (a,b)$.

2 ـــ جد متجه احداثيات كل من المتجهات التالية في $M_2(C)$ على الحقل C بالنسبة للقاعدة :

$$S=\left\{A_1=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left., A_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}\right\}. A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 2+3i \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 2-5i & 0 \\ 0 & 7+i \end{pmatrix}. D=\begin{pmatrix} 1+i & -i \\ i & i \end{pmatrix} E=\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -5i & 3 \end{pmatrix}$$

3 ـــ جد متجه احداثيات كل من المتجهات التالية في $P_2(R)$ وذلك بالنسبة للقاعدة :

$$S=\{1-x, 1+x, 2-x^2\}$$

$$. A=\sqrt{2}+x-(1/3)x^2, B=2x+7x^2, C=3$$

4 ـــ

(أ) اعتبر C^2 فضاء متجهات على الحقل C وجد متجه احداثيات $A=(1,-i)$ بالنسبة للقاعدة :

$$. S=\{A_1=(-1,0), A_2=(0,2+3i)\}$$

(ب) اعتبر C^2 فضاء متجهات على الحقل R وجد متجه احداثيات $A=(1,-i)$ بالنسبة للقاعدة :

$$S=\{A_1(-1,0), A_2=(1+i,0), A_3=(0,2i), A_4=(1,1+i)\}$$

ء حد مصفوفة الانتقال من القاعدة $S=\{A_1=(1,2), A_2=(\ \ 2,3)\}$ لفضاء R^2 الى القاعدة $. S^*=\{A_1^*=(-1,0), A_2^*=(1,-2)\}$

6 ــ جد مصفوفة الانتقال من القاعدة

$S=\{A_1=2, A_2= 1-x+x^2, A_3= 2x+3x^2\}$

للفضاء $P_2(R)$ الى القاعدة

$.\ S^\star=\{A^\star_1= 1+x, A^\star_2=x^2, A^\star_3= 3+4x+5x^2\}$

7 ــ اعتبر V هو الفضاء المولد من قبل المتجهين

$A_2(x) = \text{Cos}x, A_1(x)= \text{Sin}x$

(أ) اثبت ان $B=\{B_1(x) = 2\text{Sin}x+\text{Cos}x, B_2(x)= 3\text{Cos}x\}$ تكون قاعدة للفضاء V .

(ب) جد مصفوفة الانتقال من القاعدة $A = \{A_1, A_2\}$ الى القاعدة $.\ B=\{B_1, B_2\}$

(ج) جد متجه احداثيات $C(x) = -2\text{Sin}\ x + 3\text{Cos}x$ بالنسبة للقاعدة $B=\{B_1, B_2\}$ وذلك بالاعتماد على مبرهنة (1.9.1) ثم تأكد من عملك بحساب ذلك المتجه بصورة مباشرة .

(د) جد مصفوفة الانتقال من القاعدة $B = \{B_1, B_2\}$ الى القاعدة $.\ A=\{A_1, A_2\}$

8 ــ اذا علمت بأن مصفوفة الانتقال من القاعدة $S=\{A_1, A_2\}$ الى R^2 الى القاعدة $S^\star=\{A^\star_1= (-7,5), A^\star_2= (2,1)\}$ ، هي المصفوفة

$$P=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

فجد متجهات القاعدة S .

9 ــ اذا علمت بأن مصفوفة الانتقال من القاعدة $S=\{A_1=1+x, A_2=1-x\}$ للفضاء $P_1(R)$ الى القاعدة $S^\star=\{A^\star_1, A^\star_2\}$ ، هي المصفوفة

$$P=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

فجد متجهات القاعدة $S^\star$.

10 ــ جد المتجه A في $M_2(R)$ الذي متجه احداثياته بالنسبة للقاعدة

$$S=\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

هو المتجه $X=(1,2,0,4)$.

11 ــ جد المتجه A في $P_2(C)$ على الحقل C الذي متجه احداثياته بالنسبة للقاعدة :

$S=\{i, 1+(1-i)x, (1+i)x^2\}$ هو المتجه $X=(-1+i, -i,3)$.

الفصــل الثانــي

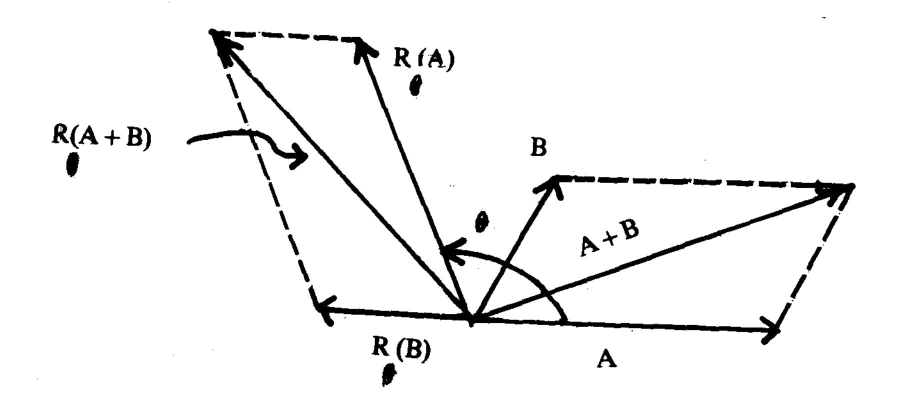
التحويلات الخطية : Linear Transformations

(2.0) مقدمــة :

في موضوع الجبر الخطي، توجد تطبيقات عديدة على موضوع فضاء المتجهات والدوال بين فضاءات المتجهات ، ومن اهم هذه التطبيقات التي تستعمل في الفيزياء والعلوم الهندسية والعلوم الاجتماعية ، والافرع المختلفة من الرياضيات هي التحويلات الخطية ، وهي عبارة عن دوال مجالها ومجالها المقابل عبارة عن فضائي متجهات بحيث تنقل كل تركيب خطي لمتجهات في الفضاء الاول (المجال) الى التركيب الخطي نفسه لمتجهات اخرى في الفضاء الثاني (المجال المقابل) .

من الامثلة الهندسية على تلك التحويلات هي تدوير المستوى R^2 بزاوية معينة θ فإذا رمزنا للتدوير بالرمز R_θ فإنه يمكن اعتبار R_θ دالة من R^2 الى R^2 ، اي $R_\theta : R^2 \to R^2$ ، هذا التدوير ينقل متوازي الاضلاع ذا الضلعين A, B الى متوازي اضلاع آخر ذي ضلعين $R_\theta(B)$ ، $R_\theta(A)$ بحيث ان القطر $A+B$ ينتقل الى القطر $R_\theta(A) + R_\theta(B)$ ، اي بمعنى ان $R_\theta(A+B) = R_\theta(A) + R_\theta(B)$.

انظر الشكل رقم (1) .



شكل (1)

كذلك فإنه اذا كان r اي عدد حقيقي فإن الدالة R_θ تحقق $R_\theta(rA) = rR_\theta(A)$.

هذا تحويل خطي من المستوى الى نفسه، وفي البند (2.1) سوف نذكر التعريف العام للتحويلات الخطية ثم نعطي امثلة توضح فكرتها. البند (2.2) سوف يركز على الامور النظرية، ويعطي خصائص التحويلات الخطية، وعلاقتها بالفضاءات الجزئية والابعاد. في البند (2.3) سنتناول دراسة تركيب التحويلات الخطية والتحويلات النظيرة اما البند (2.4) فقد خصص لدراسة العلاقة بين المصفوفات والتحويلات الخطية، تلك العلاقة الوطيدة التي تمكن من معرفة وبرهنة خصائص المصفوفات بأستعمال التحويلات الخطية وبالعكس. البند (2.5) سيتناول دراسة تغيير القواعد وعلاقة ذلك بمصفوفة التحويل الخطي. **ويجيب على تساؤلات تطرح في البند (2.4) .**

(2.1) التحويلات الخطية (Linear Transformations)

تعريف :

ليكن W,V فضائي متجهات على الحقل F نفسه، ولتكن $T:V \to W$ دالة تحقق

$$(i)\ T(A+B) = T(A) + T(B)$$
$$(ii)\ T(rA) = rT(A)$$

وذلك لاي متجهات $A,B \in V$ ولاي عدد قياسي $r \in F$. بهذه الحالة نسمي T تحويلاً خطياً من V الى W .

مثال (1) :

ليكن $V = R^3$ و $W = R^2$ ولتكن $T: R^3 \rightarrow R^2$ دالة معرفة بالصيغة :

$$T(x,y,z) = (x+y,z)$$

إن T تكون تحويلاً خطياً من R^3 الى R^2 ، ولبرهنة ذلك نأخذ $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$

بهذا يكون

$$\begin{aligned} T(A+B) &= T(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \\ &= ((a_1+b_1) + (a_2+b_2), (a_3+b_3)) \\ &= (a_1+a_2, a_3) + (b_1+b_2, b_3) \\ &= T(A) + T(B) \end{aligned}$$

لو كان $r \in R$ اي عدد حقيقي فإنه :

$$\begin{aligned} T(rA) &= T(ra_1, ra_2, ra_3) \\ &= (ra_1+ra_2, ra_3) \\ &= (r(a_1+a_2), ra_3) \\ &= r(a_1+a_2, a_3) \\ &= rT(A) \end{aligned}$$

نستنتج من هذا ان الدالة T تحقق الشرطين اعلاه وعليه تكون تحويلاً خطياً .

مثال (2) :

الدالة $T: P_2(R) \rightarrow M_2(R)$ المعرفة بالصيغة

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} a-2b & o \\ o & a+c \end{bmatrix}$$

تكون تحويلاً خطياً والتحقيق كما في مثال (1)

مثال (3) :

اذا كان V و W اي فضائي متجهات على الحقل F ، فإن الدالة الثابتة $T:V \rightarrow W$ والمعرفة بالصيغة $T(A) = O$ لكل $A \in V$ تكون تحويلاً خطياً ، يسمي بالتحويل **الصفري** (Null Transformation)،نترك الاثبات على ان T تحويلاً خطياً كتمرين .

مثال (4) :

اذا كان V اي فضاء متجهات فإن الدالة $T:V \rightarrow V$ المعرفة بالصيغة $T(A) = A$ لكل $A \in V$ تكون تحويلاً خطياً ، يسمى بالتحويل المحايد **(Identity transformation)** . الاثبات تمرين .

مثال (5) :

برهن على ان الدالة $T: R^2 \rightarrow R$ المعرفة بالصيغة

$$T(x,y) = xy + 1$$

ليست تحويلاً خطياً .

البرهان :

ليكن $A=(a_1, a_2)$ ، $B=(b_1,b_2)$.

$$
\begin{aligned}
T(A+B) &= T(a_1+b_1, a_2+b_2)\\
&= (a_1+b_1)(a_2+b_2)+1\\
&= a_1a_2+b_1b_2+a_1b_2+b_1a_2+1
\end{aligned}
$$

لكن

$$
\begin{aligned}
T(A)+T(B) &= (a_1a_2+1)+(b_1b_2+1)\\
&= a_1a_2+b_1b_2+2
\end{aligned}
$$

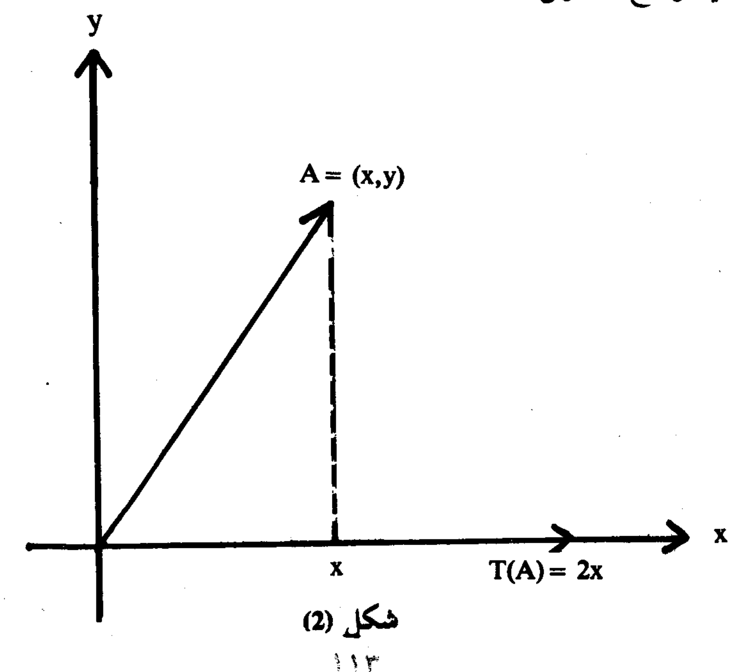
وبهذا اصبح واضحاً ان $T(A+B) \neq T(A) + T(B)$ عندما يكون A,B اي زوج من المتجهات في R^2 .

مثال (6) :

الدالة $T:R^2 \rightarrow R$ المعرفة بالصيغة

$$T(x,y) = 2x$$

تكون تحويلاً خطياً . والتحقيق مشابه تماماً للمثال (1) . انظر الشكل رقم (2) الذي يوضح التحويل T اعلاه هندسياً .



شكل (2)

المبرهنة التالية تعطي بعض الخصائص البسيطة للتحويلات الخطية .

مبرهنة (2.1.1) :

اذا كان $T:V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً بين الفضائين W,V على الحقل F فإن

(أ) $T(O) = O$

(ب) لأي مجموعة متجهات $A_1, A_2, \ldots, A_n \in V$ ولأي مجموعة اعداد قياسية $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$ يكون لدينا

$$T(x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n) = x_1T(A_1) + x_2T(A_2) + \ldots + x_nT(A_n)$$

البرهان :

(أ) بما ان $o.A = O$ لأي متجه $A \in V$ ، عليه يكون $0.O = O$ ، وبالتالي وحسب الشرط (2) من تعريف التحويل الخطي يكون لدينا :

$$T(O) = T(o.O) = o.T(O) = O$$

(ب) حسب الشرط (1) من تعريف التحويل الخطي نستنتج

$$T(x_1A_1 + \ldots + x_nA_n) = T(x_1A_1) + \ldots + T(x_nA_n)$$

اما الشرط الثاني من التعريف فيعطي النتيجة المطلوبة لان

$$T(x_kA_k) = x_k T(A_k)$$

لكل $k: 1,2,\ldots,n$.

(و . هـ . م .)

المبرهنة التالية توضح لنا كيف انه بالامكان معرفة التحويل الخطي بمجرد معرفة قيمته على عناصر اي قاعدة كانت .

مبرهنة (2.1.2) :

اذا كان V فضاء متجهات منتهي البعد وكانت $\{A_1, ..., A_n\}$ قاعدة الى V ، فإنه لأي مجموعة $\{B_1, ..., B_n\}$ متكونة من n من المتجهات العشوائية في W . يوجد تحويل خطي وحيد $T:V \rightarrow W$ يحقق :

$$T(A_1) = B_1, ..., T(A_n) = B_n$$

ولأي اعداد قياسية $x_1,...,x_n$ يكون :

$$T(x_1A_1 + ... + x_nA_n) = x_1B_1 + ... + x_nB_n$$

البرهان :

سنبرهن اولاً بأنه يوجد تحويل خطي $T:V \rightarrow W$ يحقق الشرطين اعلاه . لهذا الغرض نأخذ $A \in V$ اي متجه . بما ان المجموعة $\{A_1, ..., A_n\}$ تكون قاعدة الى V بالفرض . أذن توجد اعداد قياسية وحيدة $x_1 ..., x_n$ بحيث

$$A = x_1A_1 + ... + x_nA_n$$

لو وضعنا $T(A) = x_1B_1 + ... + x_nB_n$ ،

لنكون قد عرفنا دالة $T:V \rightarrow W$ ولغرض التحقق من ان الدالة اعلاه تكون تحويلاً خطياً نأخذ A, C اي متجهة في V ولنفرض ان $A = x_1A_1 + ... + x_nA_n$ ، $C = y_1A_1 + ... + y_nA_n$ بذلك يكون :

$$A + C = (x_1 + y_1) A_1 + ... + (x_n + y_n) A_n$$

ومن تعريف الدالة T اعلاه نحصل على :

$$\begin{aligned} T(A + C) &= (x_1 + y_1) B_1 + ... + (x_n + y_n) B_n \\ &= x_1B_1 + y_1B_1 + ... + x_nB_n + y_nB_n \\ &= (x_1B_1 + ... + x_nB_n) + (y_1B_1 + ... + y_nB_n) \\ &= T(A) + T(C) \end{aligned}$$

ليكن الان r اي عدد قياسي

اذن : $rA = (rx_1) A_1 + ... + (rx_n)A_n$

وعليه يكون

$$T(rA) = (rx_1) B_1 + \dots + (rx_n) B_n$$
$$\doteq r (x_1B_1 + \dots + x_nB_n)$$
$$= rT (A)$$

بهذا نكون قد برهنا على ان الدالة T اعلاه تكون تحويلاً خطياً محققاً الشروط المذكورة . مثل هذا التحويل يكون وحيداً ، لانه لو كان $S:V \rightarrow W$ اي تحويلاً خطياً محققاً للشروط .

$$S(A_1) = B_1, \dots, S(A_n) = B_n$$

فإن

$$S(x_1A_1 + \dots + x_nA_n) = x_1 S(A_1) + \dots + x_nS(A_n)$$
$$= x_1B_1 + \dots + x_nB_n$$

وبالتالي يحقق S الشرط الثاني ويكون مساوياً الى T .

(و . هـ . م .)

المثال التالي يوضح ماجاء في المبرهنة اعلاه .

مثال (7) :

اعتبر المجموعة $\{A_1 = (1,0), A_2 = (2,7)\}$ قاعدة الى R^2 . ثم جد تحويلاً خطياً $T:R^2 \rightarrow P_2(R)$ يحقق :

$$T(A_1) = 1 + x, T(A_2) = -1 + x - 3x^2$$

الحل : المطلوب ايجاد $T(A)$ لاي متجه $A = (a,b) \in R^2$ ، نحاول اولاً ايجاد اعداد قياسية x_1, x_2 تحقق

$$A = x_1A_1 + x_2A_2$$

اي ان المطلوب حل المعادلة

$$(a,b) = x_1(1,0) + x_2(2,7)$$
$$= (x_1 + 2x_2, 7x_2)$$

بهذا نحصل على معادلتين :

$$x_1 + 2x_2 = a$$
$$7x_2 = b$$

والحل يكون

$$x_1 = a - (2b/7) \quad , x_2 = b/7$$

الان نعرف $T:R^2 \rightarrow P_2(R)$ بالصيغة التالية :

$$T(A) = T(a,b) = x_1(1+x) + x_2(-1+x-3x^2)$$
$$= (a-2b/7)(1+x) + (b/7)(-1+x-3x^2)$$
$$= (a-3b/7) + (a-b/7)x + (-3b/7)x^2$$

ملاحظة :

المبرهنة (2.1.2) توضح ان التحويلات الخطية ليست دوالاً عادية وكذلك فإن قواعد فضاءات المتجهات ليست مجموعات جزئية عادية . فمجرد معرفتنا لقيم التحويل الخطي على عناصر القاعدة نكون قد حددنا التحويل الخطي وعرفنا قيمته على جميع عناصر الفضاء .

مثال (8) :

هل يوجد تحويل خطي واحد فقط $T:R^2 \rightarrow R^3$ يحقق

$$T(1,2) = (0,3,0)$$

الحل : نلاحظ هنا ان المعروف فقط قيمة T على متجه واحد وهو (1,2) وبما ان المجموعة $\{(1,2)\}$ لاتصلح بأن تكون قاعدة الى R^2 فعليه نتوقع وجود اكثر من تحويل واحد .

الان اذا كان T تحويلاً خطياً بحيث $T(1,2) = (0,3,0)$ فإن

$$T(x,2x) = T(x(1,2)) = xT(1,2)$$
$$= x(0,3,0) = (0,3x,0)$$

هذا يعني اننا سنعرف قيم T على جميع المتجهات ذات الصيغة (x,2x) فمثلاً المتجه (2,3) لايكون بالصيغة اعلاه وبالتالي لانعرف اين يرسله T لكن لو اعطينا اي قيمة الى T(2,3) مثل

$$T(2,3) = (1,1,0)$$

لاصبح بالامكان معرفة T(a,b) لاي متجه (a,b) من R^2 وذلك كما في المثال (7) . هذا يعني وجود تحويلات كثيرة ترسل المتجه (1,2) الى المتجه (0,3,0) لكنها تختلف بكيفية ارسالها للمتجهات ذات الصيغة (a,b) حيث $b \neq 2a$.

الان نعرف جمع التحويلات الخطية وضربها بأعداد قياسية .

تعريف :

لأي فضائي متجهات V و W على الحقل F نفسه ، ولأي تحويلين خطيين $S,T:V \to W$ يمكن تعريف دالة .

$$S+T:V \to W$$

بالصيغة

$$(S+T)(A) = S(A) + T(A)$$

كذلك فإنه لأي عدد قياسي $r \in F$ يمكن تعريف دالة

$$rT:V \to W$$

بالصيغة

$$(rT)(A) = rT(A)$$

مثال (9) :

اذا كان $S,T:R^2 \to R^2$ تحويلين خطيين معرفين بالصيغتين :

. $S(x,y) = (x,2y)$, $T(x,y) = (y,o)$

فجد الدوال التالية :

$$2S \text{ و } -5T, S+T; 2S-5T$$

الحل : من التعريف اعلاه ينتج

$$(2S)(x,y) = 2\,S(x,y) = (2x,4y)$$
$$(-5T)\,(x,y) = (-5)\,T\,(x,y) = (-5y,o)$$
$$(2S-5T)\,(x,y) = 2S(x,y) + (-5T)\,(x,y)$$
$$= (2x,4y) + (-5y,o)$$
$$= (2x-5y,4y)$$
$$(S+T)\,(x,y) = S(x,y) + T(x,y)$$
$$= (x,2y) + (y,o) = (x+y,2y)$$

مبرهنة (2.1.3) :

لأي تحويلين خطيين $S,T:V \rightarrow W$ ولأي عدد قياسي r تكون كل من الدالتين $S+T$ ، rT تحويلاً خطياً

البرهان :

نأخذ B , A اي متجهين في V ونحسب كما يلي :

$$(S+T)\,(A+B) = S(A+B) + T(A+B)$$
$$= S(A) + S(B) + T(A) + T(B)$$
$$= S(A) + T(A) + S(B) + T(B)$$
$$= (S+T)\,(A) + (S+T)\,(B)$$

ولأي عدد قياسي x يكون

$$(S+T)\,(xA) = S(xA) + T(xA)$$
$$= x\,S(A) + x\,T(A)$$
$$= x(S(A) + T(A))$$
$$= x((S+T)\,(A))$$

بذلك تكون الدالة $S+T$ تحويلاً خطياً .

بالنسبة الى rT فإن البرهان مماثل ونتركه كتمرين .

(و . هـ . م)

مبرهنة (2.1.4)

اذا كان كل من W,V فضاء متجهات على الحقل F فإن مجموعة جميع التحويلات الخطية من V الى W والتي يرمز لها بالرمز L(V,W) تكون فضاء متجهات على الحقل F .

البرهان :

المبرهنة (2.1.3) تفيد بأنه بالامكان تعريف جمع التحويلات الخطية وضربها بأعداد قياسية وبالنسبة لهاتين العمليتين تتحق جميع الشروط المذكورة في البند الاول حول تعريف فضاء المتجهات ونترك التفاصيل للطالب .

(و . هـ . م)

مثال (10) :

اذا كان V فضاء متعددات الحدود بـ x من اي درجة وذات المعاملات من اي حقل F فإن V يكون فضاء متجهات على الحقل F .

لتكن $S:V \to V$ دالة معرفة بالصيغة :

$$S(P(x)) = P'(x) \text{ ,(}P(x) \text{ مشقة)}$$

و $T:V \to V$ دالة معرفة بالصيغة :

$$T(P(x)) = x\,P(x)$$

فبرهن على ان كل من T,S يكون تحويلاً خطياً . ثم جد

$T(x + x^2 - 2x^5)$, $S(2 - x + x^3)$

الحل :

$$S(p(x) + q(x)) = (p(x) + q(x))'$$
$$= p'(x) + q'(x) = S(p(x)) + S(q(x))$$
$$S(rp(x)) = (rp(x))' = rp'(x) = rS(p(x))$$

عليه يكون S تحويلاً خطياً .

$$T(P(x) + q(x)) = x(P(x) + q(x))$$

$$= xP(x) + xq(x) = T(P(x)) + T(q(x))$$

$$T(rp(x)) = x(rp(x)) = r(xp(x))$$
$$= rT(p(x))$$

عليه يكون T تحويلاً خطياً ايضاً . والان

$$S(2-x+x^3) = (2-x+x^3)$$
$$= -1 + 3x^2$$

$$T(x+x^2-2x^5) = x(x+x^2-2x^5)$$
$$= x^2 + x^3 - 2x^6$$

تمارين (2.1)

1 ــ اي من الدوال التالية يكون تحويلاً خطياً .

(أ) $T:R^2 \rightarrow R^2$ ، $T(x,y) = (x-2y, 3y)$.

(ب) $T:R^2 \rightarrow R^2$ ، $T(x,y) = (x^2, xy)$.

(ج) $T:R \rightarrow R^3$ ، $T(x) = (x,2x,0)$.

(د) $T:P_1(R) \rightarrow R^2$ ، $T(a+bx) = (2a,b+1)$.

(هـ) $T: M_2(R) \rightarrow R^3$ ، $T\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = (x-y,o,z+w)$.

2 ــ برهن على ان كل من الدوال التالية تكون تحويلاً خطياً .

(أ) $T:C^2 \rightarrow C^3$ ، $T(z_1,z_2) = (iz_1, z_1-z_2, -iz_2)$.

(ب) $T:R^2 \rightarrow P_2(R)$ ، $T(a,b) = a-bx+(a+b)x^2$.

(ج) $T: R^3 \rightarrow R$ ، $T(x,y,z) = x+2y-z$.

(د) $T: M_2(R) \rightarrow P_1(R)$ ، $T:\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a+(2b-c)x$

3 ــ اذا كان $T: R^2 \rightarrow R^3$ تحويلا خطياً معرفاً بالصيغة

$$T(x,y) = (x+y, x-y, 2x)$$

و $S: R^2 \rightarrow R^3$ تحويلاً خطياً معرفاً بالصيغة

$$S(x,y) = (0,0,2x+3y)$$

فجد كل مما يلي :

. $T - S,\ 2T + 3S,\ \sqrt{2}T + 4S$

4 ــ جد التحويل الخطي $T: C^2 \rightarrow R^4$ الذي يحقق

$$T(2,0) = (1,1,1,1),\ T(1+i,o) = (0,0,1,0)$$
$$T(0,-2i) = (0,1,-1,0),\ T(0,1) = (0,0,0,0)$$

حيث ان C^2 هو فضاء متجهات على حقل R .

5 ــ جد تحويلين خطيين مختلفين $T_1, T_2: R^2 \rightarrow R^3$ يحققان

. $T_1(1,-5) = T_2(1,-5) = (2,4,0)$

6 ــ اذا كانت $f: R^3 \rightarrow R^2$ دالة تحقق

$f(1,1,0) = (2,3),\ f(1,0,1) = (-1,2)$

$f(2,1,1) = (1,3)$ ، فهل يمكن لـ f ان تكون تحويلاً خطياً ؟ .

7 ــ

(أ) اعتبر C^2 فضاء متجهات على الحقل C ثم جد تحويلاً خطياً $T: C^2 \rightarrow C^2$ يحقق $T(-1,0) = (i,1-i),\ T(0,3) = (0,1+i)$.

(ب) اعتبر C^2 فضاء متجهات على الحقل R ثم جد تحويلاً خطياً $S: C^2 \rightarrow C^2$

. $S(-1,0) = (i,1-i),\ S(0,3) = (0,1+i)$

(ج) برهن على وجود تحويل خطي واحد فقط في (أ) واكثر من واحد في (ب) .

8 ــ ليكن $T: V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً ولتكن $\{A_1,\ldots,A_n\}$ مجموعة متجهات في V . اذا كانت $\{T(A_1), \ldots, T(A_n)\}$ مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات في W فبرهن على ان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_n\}$ تكون ايضاً مستقلة خطياً .

9 ــ اذا كان $T_1, T_2: V \to R$ تحويلين خطيين على فضاء متجهات V على الحقل R فبرهن على ان الدالة

$$S:V \to R^3$$

المعرفة بالصيغة

$$S(A) = (T_1(A), O, T_2(A))$$

تكون تحويلاً خطياً .

10 ــ

(أ) ليكن $T:R \to R$ تحويلاً خطياً . برهن على وجود عدد t يعتمد على T بحيث $T(x) = tx$ لجميع قيم $x \in R$.

(ب) اذا كان $T:R \to R$ تحويلاً خطياً بحيث $T(5) = -2$ فإحسب $T(-\sqrt{3})$.

(2.2) الرتبة والصفرية (Rank and Nullity)

تعريف :

لأي تحويل خطي $T:V \to W$ بين فضائي متجهات ، يمكن تعريف مايلي :

1 ــ صورة T (Image of T) ويرمز لها بالرمز ImT وتعرف كالاتي :

$$Im(T) = \{ B \in W : B = T(A), A \in V \}$$

2 ــ نواة T (kernel of T) ويرمز لها بالرمز KerT وتعرف كالاتي :

$$KerT = \{ A \in V : T(A) = O \}$$

لاحظ أن $ImT \subset W$ و $KerT \subset V$.

مثال (1) :

اذا كان $T:R^3 \rightarrow R^3$ تحويلاً خطياً معرفاً بالصيغة :

$$T(x,y,z) = (x+2y,0,3z)$$

فجد المجموعات الجزئية ImT , KerT

الحل : لايجاد KerT ، نحاول حل المعادلة $T(x,y,z) = (0,0,0)$ التي بدورها تعطي ثلاث معادلات

$$x+2y=0$$

$$0=0$$

$$3z=0$$

عندئذ يكون : $x=-2y$ و $z=0$ حلاً لتلك المعادلات . بهذا يمكن وصف KerT كالاتي :

$$KerT = \{(x,y,z): x=-2y \ , \ y=y, \ z=o\}$$

اما بالنسبة الى ImT فإننا نبحث عن جميع المتجهات $B=(a,b,c)\in R^3$ التي تحقق : $T(x,y,z) = B$ ، اي ان

$$x+2y = a$$

$$o=b$$

$$3z= c$$

نلاحظ هنا بأن $b=o$ ، اما بالنسبة الى c,a فلا يوجد شرط يحدد قيمهما ولا توجد علاقة تربطهما ، وبالتالي يمكن وصف ImT كالاتي :

$$ImT = \{(a,b,c): a=a, \ b=o, \ c=c\}$$

وبهذا نلاحظ ان $T(a,o,c/3) = (a,o,c)$ ، اي انه لاي متجه $(a,o,c)\in ImT$ يوجد $(a,o,c/3)\in R^3$ يحقق $T(a,o,c/3) = (a,o,c)$.

مبرهنة (2.2.1) :

لأي تحويل خطي $T:V \rightarrow W$. يكون لدينا

1 ــ $KerT$ فضاء جزئي من V .
2 ــ ImT فضاء جزئي من W .

البرهان :

1 ــ لبرهنة ان $KerT$ هو فضاء جزئي، يجب ان نبرهن انه مغلق بالنسبة للجمع والضرب في اعداد قياسية . نأخذ A_2, A_1 متجهين في $KerT$ و r اي عدد قياسي . فيكون

$$T(A_1 + A_2) = T(A_1) + T(A_2)$$
$$= O + O = O$$

اذن $A + B \in KerT$ ايضاً .

$$T(rA_1) = rT(A_1) = r.O = O$$

اي ان rA_1 في $KerT$.

2 ــ نأخذ الان B_1, B_2 في ImT و r اي عدد قياسي . لبرهنة ان ImT هو فضاء جزئي من W ، يجب البرهنة على ان $B_1 + B_2$ في ImT و rB_1 في ImT ، اي اننا يجب ان نجد متجهين A , C في V يحققان $T(A) = B_1 + B_2$ و $T(C) = rB_1$.

حيث ان B_1, B_2 في ImT فيوجد متجهان A_1, A_2 في V بحيث يكون $T(A_1) = B_1$, $T(A_2) = B_2$. نعتبر الان $A = A_1 + A_2$ و $C = rA_1$ فيكون

$$T(A) = T(A_1 + A_2) = T(A_1) + T(A_2) = B_1 + B_2$$

وايضاً

$$T(C) = T(rA_1) = rT(A_1) = rB_1$$

اي ان $rB_1 \in ImT$.

هذا يعني ان كل من $KerT$, ImT يكون فضاءاً جزئياً .

(و . هـ . م)

على ضوء المبرهنة اعلاه نقدم التعريف الاتي :

تعريف :

بصفرية T (Nullity of T) نقصد بُعد الفضاء الجزئي KerT اي dim (KerT) ، وبرتبة T (Rank of T) نقصد بُعد الفضاء الجزئي ImT ، اي dim(ImT) .

مثال (2) :

جد صفرية ورتبة التحويل الخطي T المعرف في المثال (8) .

الحل: من المثال (8) نلاحظ ان

$$KerT = \{(x,y,z): x=-2y,\ y=y,\ z=o\}$$

$$ImT = \{(a,b,c): a=a,\ b=o,\ c=c\}$$

عندئـذ تكـون المجموعـة $S=\{(-2,1,0)\}$ قاعـدة الى KerT ، والمجموعـة $H=\{(1,0,0)\ ,\ (0,0,1)\}$ قاعدة الى ImT ، وبالتالي يكون :

$$dim(KerT)=1,\ dim\ (ImT)=2$$

اي ان صفرية T = 1 ، رتبة T = 2 .

المبرهنة ادناه تعتبر من المبرهنات المهمة في موضوع الجبر الخطي وهي تربط بعد مجال التحويل الخطي بأبعاد نواته وصورته .

مبرهنة (2.2.2) :

اذا كان $T:V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً فإن رتبة T + صفرية T = بعد V .

$$dim\ V = dim(KerT) + dim(ImT)$$

البرهان :

لنفرض ان $dim(KerT)=k,\ dim\ V=n$. بما ان KerT فضاءاً جزئياً من V ، فعليه يكون $k \leq n$. نأخذ قاعدة $\{A_1, ..., A_k\}$ الى KerT وحسب

مبرهنة (1.8.5) فإنه توجد متجهات $A_{k+1},\dots,A_n$ بحيث ان المجموعة $\{A_1,\dots,A_k, A_{k+1},\dots,A_n\}$ تكون قاعدة الى V. لننظر الى المجموعة $\{B_1=T(A_{k+1}), \dots, B_{n-k}=T(A_n)\}$ المتكونة من n-k من المتجهات في W.
هذه المجموعة تكون مجموعة مولدة الى الفضاء الجزئي ImT وذلك لانه لو اخذنا $B \in ImT$، لوجد متجه $A \in V$ بحيث $T(A)=B$. بما ان المجموعة $\{A_1,\dots, A_k,A_{k+1},\dots,A_n\}$ قاعدة الى V والمتجه $A \in V$ فعليه يمكن كتابة A كتركيب خطي بالصيغة:

$$A= x_1A_1+ \dots + x_kA_k+x_{k+1}A_{k+1} +\dots + x_nA_n$$

عندئذ يكون:

$$B= T(A)= x_1T(A_1) +\dots+ x_kT(A_k)+ x_{k+1} T(A_{k+1}) +\dots+ x_nT(A_n)$$

$$= x_1.0+\dots+x_k.0+x_{k+1} B_1+\dots+ x_n B_{n-k}$$
$$= x_{k+1}B_1+\dots+ x_nB_{n-k}$$

وهذا يعني انه بالامكان كتابة اي متجه $B \in ImT$ كتركيب خطي من المتجهات $B_1, \dots, B_{n-k}$، اي بمعنى ان المجموعة $\{B_1, \dots, B_{n-k}\}$ تكون مجموعة مولدة الى ImT. بالاضافة الى ماتقدم فإن المجموعة $\{B_1,\dots, B_{n-k}\}$ يجب ان تكون مجموعة مستقلة خطياً. ولرؤية ذلك نأخذ تركيباً خطياً مساوياً للصفر لمتجهات تلك المجموعة مثل:

$$y_1B_1+ \dots + y_{n-k} B_{n-k}=o$$

وعند التعويض نحصل على

$$y_1T(A_{k+1}) +\dots+y_{n-k}T(A_n)= o$$

اي ان

$$T(y_1A_{k+1}+\dots+ y_{n-k}A_n)= o$$

وهذا يعني ان المتجه $y_1A_{k+1}+\dots+ y_{n-k}A_n \in KerT$ وبالتالي يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات $A_1, \dots, A_k$ التي تكون قاعدة الى KerT اي ان:

$$y_1A_{k+1} + \ldots + y_{n-k}A_n = x_1A_1 + \ldots + x_kA_k$$

المعادلة اعلاه يمكن ان تكتب بالصيغة

$$x_1A_1 + \ldots + x_kA_k - y_1A_{k+1} - \ldots - y_{n-k}A_n = o$$

وهذا تركيباً خطياً مساوياً للصفر لمجموعة متجهات مستقلة خطياً، وعليه فإن

$$x_1 = 0, \ldots, x_k = o,\ y_1 = 0, \ldots, y_{n-k} = o$$

وعليه تكون المجموعة $\{B_1, \ldots, B_{n-k}\}$ مستقلة خطياً، وبما انها مولدة الى ImT فتكون قاعدة له. وبما ان عدد المتجهات في تلك القاعدة يساوي n-k نستنتج على ان $\dim(\text{ImT}) = n-k$.

وهذا يكمل البرهان •

(و . هـ . م)

مثال (3) :

جد رتبة وصفرية التحويل الخطي $T:R^3 \to R^2$ المعرف بالصيغة

$$T(x,y,z) = (y,z)$$

الحل : التحويل اعلاه يكون دالة شاملة وعليه فإن $\text{ImT} = R^2$ اذن رتبة $T = 2$

وبتطبيق المبرهنة (2.2.2) نحصل على

$$\begin{aligned}\dim(\text{KerT}) &= 3 - \dim(\text{ImT}) \\ &= 3-2 = 1\end{aligned}$$

مثال (4) :

برهن على ان اي تحويل شامل $T:R^n \to R^n$ يجب ان يكون متبايناً.

البرهان :

بما ان T شامل. اذن $\text{ImT} = R^n$ وعليه تكون رتبة T مساوية الى n.

بتطبيق مبرهنة (2.2.2) نحصل على ان

$$\dim (KerT) = n-n= o$$

هذا يعني ان $KerT = \{O\}$. الان لو كان $T(A) = T(B)$ فإن :

$$T (A - B) = O$$

وهذا يعني ان $A-B \in KerT$. اي ان $A-B = O$ وبالتالي فإن $A = B$

إذن T متباين .

جزء من فكرة المثال اعلاه عبارة عن نتيجة هامة لابد من تدوينها .

مبرهنة (2.2.3) :

اذا كان $T:V \to W$ تحويلاً خطياً فإن :

(أ) T متباين اذا وفقط اذا $Ker\, T = \{O\}$.

(ب) T شامل اذا وفقط اذا $ImT = W$.

(و . هـ . م)

البرهان :

(أ) مبرهن في مثال (4) و (ب) نتيجة مباشرة للتعاريف .

مثال (5) :

جد تحويلاً خطياً $T:R^3 \to R^2$ بحيث ان المجموعة $\{A_1 = (1,-1,0),\ A_2 = (2,0,1)\}$ تكون قاعدة لنواته .

الحل : التحويل المطلوب يجب ان يحقق :

$$T(A_1) = T(1,-1,0) = (0,0)$$
$$T(A_2) = T(2,0,1) = (0,0)$$

المبرهنة (2.1.2) تضمن لنا ايجاد التحويل بعد معرفتنا لقيمه على عناصر اي قاعدة كانت . لنأخذ المتجه $A_3 = (0,0,1)$ ونلاحظ ان المجموعة

$$\{A_1 = (1,-1,0),\ A_2 = (2,0,1),\ A_3 = (0,0,1)\}$$

تكون قاعدة الى R^3 . لنرسل المتجه A_3 بواسطة T الى اي متجه غير صفري في R^2 وليكن

$$T(A_3) = T(0,0,1) = (1,-1)$$

(عند وضع $T(A_3) = (0,0)$ فإن A_3 سوف ينتمي الى KerT وبذلك يكون $KerT = R^3$ والتحويل T لن يكون التحويل المطلوب) .

الآن اذا كان

$$(x,y,z) = aA_1 + bA_2 + cA_3$$

فإن

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= aT(A_1) + bT(A_2) + cT(A_3) \\ &= a(0,0) + b(0,0) + c(1,-1) \\ &= c(1,-1) \end{aligned}$$

اذن المطلوب ايجاد c . المعادلة

$$(x,y,z) = aA_1 + bA_2 + cA_3$$

تؤدي الى

$$(x,y,z) = (a+2b,\ -a,\ b+c)$$

اذن

$$\begin{aligned} a+2b &= x \\ -a &= y \\ b + c &= z \end{aligned}$$

حل هذه المعادلات يؤدي الى

$$a = -y,\ b = (1/2)(x+y),\ c = z-(1/2)(x+y)$$

اذن

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= c(1,-1) \\ &= (z-(1/2)x-(1/2)y,\ (1/2)x+(1/2)y-z) \end{aligned}$$

والان الطالب مدعو لتحقيق ان نواة T لها القاعدة المعطاة .

مثال (6) :

جد تحويلاً خطياً $T:R^3 \rightarrow R^3$ بحيث ان المجموعة $\{B_1 = (1,1,0),\ B_2 = (-2,1,3)\}$ تكون قاعدة لصورته .

الحل : لو راجعنا اثبات المبرهنة (2.2.2) مع ماتنص عليه المبرهنة (2.1.2) لوجدنا ان الحل يكمن بإختيار قاعدة الى R^3 وارسال متجهين منها بواسطة T الى المتجهين المعطيين B_1, B_2 وارسال الثالث الى متجه يعتمد خطياً على B_1, B_2 وليكن المتجه الصفري $B_3 = (0,0,0)$.

لنأخذ

$$S = \{A_1 = (1,0,0),\ A_2 = (0,1,0),\ A_3 = (0,0,1)\}$$

القاعدة الطبيعية الى R^3 . وليكن T التحويل الخطي الذي يحقق

$$T(A_1) = T(1,0,0) = B_1 = (1,1,0)$$
$$T(A_2) = T(0,1,0) = B_2 = (-2,1,3)$$
$$T(A_3) = T(0,0,1) = B_3 = (0,0,0)$$

ليكن $A = (x,y,z)$ اي متجه في R^3 . اذن

$$A = (x,y,z) = xA_1 + yA_2 + zA_3$$

اذن

$$T(A) = xB_1 + yB_2 + zB_3$$

(راجع إثبات المبرهنة (2.1.2) . بالتعويض نحصل على

$$T(A) = x(1,1,0) + y(-2,1,3) + z(0,0,0)$$
$$= (x-2y,\ x+y,\ 3y)$$

اذن

$$T(x,y,z) = (x-2y,\ x+y,\ 3y)$$

تمارين (2.2)

1 ــ جد قاعدة الى KerT و قاعدة الى ImT في كل مما يلي :

(أ) $T(x,y,z) = (2x, y+z)$ و $T:R^3 \rightarrow R^2$.

(ب) $T(a_0 + a_1x) = 2a_0 - ia_1$ و $T: P_1(C) \rightarrow C$.

(اعتبر $P_1(C), C$ فضائين على الحقل C) .

(ج) $T(x,y) = (x,2x,3x)$ و $T:R^2 \rightarrow R^3$.

(د) $T\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = (x-w, y+2z)$ ، $T: M(R) \rightarrow R^2$

2 ــ جد صفرية ورتبة جميع التحويلات في تمرين (1) .

3 ــ اذا كان $T: R^3 \rightarrow R^2$ ، S تحويلين خطيين معرفين بالصيغة

$T(x,y,z) = (x,y)$ و $S(x,y,z) = (x,2x)$

فجد رتبة وصفرية كل من التحويلات التالية :

. T, S, 2T + S, T-5S

4 ــ اذا كان V فضاء متجهات منتهي البعد وعلى الحقل F وكان $T:V \rightarrow V$ تحويلاً خطياً متبايناً فبرهن على ان T يجب ان يكون شاملاً . (ارشاد : استخدم المبرهنتين (2.2.3) , (2.2.2)).

5 ــ اذا كان $T:P_2(R) \rightarrow P_2(R)$ تحويلاً خطياً معرفاً بالصيغة $T(p(x)) = P'(x)$ فجد رتبة وصفرية T .

6 ــ جد رتبة وصفرية التحويل الخطي $T:R^2 \rightarrow R^2$ الذي يحقق $T(1,1) = (\sqrt{2},\sqrt{3})$ ، $T(1,-2) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$.

7 ــ ليكن $T:V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً وليكن $B \in W$ و $A_0 \in V$ متجهاً يحقق $T(A_0) = B$. برهن على ان اي حل للمعادلة $T(X) = B$ يجب ان يكون بالصيغة $X = A_0 + C$ لمتجه ما $C \in KerT$.

8 ــ ليكن $M_n(R)$ فضاء المصفوفات nxn على حقل الاعداد الحقيقية R . لتكن $T: M_n(R) \rightarrow M_n(R)$ دالة معرفة بالصيغة

$$T(A) = (A - A^T)/2$$

حيث A^T تساوي مدورة المصفوفة A (transpose)

(أ) برهن على ان T تكون تحويلاً خطياً .

(ب) صف KerT وجد بعده .

9 ـــ اذا كانت $S: M_n(R) \rightarrow M_n(R)$ دالة معرفة بالصيغة

$$S(A) = (A + A^T)/2$$

فبرهن على ان S تكون تحويلاً خطياً ثم برهن على ان

$$ImS = Ker\ T$$

حيث T هو التحويل الخطي المعرف في تمرين (8) .

10 ـــ لتكن $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ وليكن $T: M_2(R) \rightarrow M_2(R)$ تحويلاً خطياً معرفاً بالصيغة :

$$T(A) = AM - MA$$

جد قاعدة الى نواة T (Ker T) .

11 ـــ جد تحويلاً خطياً $T: R^3 \rightarrow R^4$ بحيث ان صورة T (ImT) تتولد من قبل المتجهين $B_1 = (1,0,2,-3)$, $B_2 = (-1,1,0,0)$.

12 ـــ جد تحويلاً خطياً $T: M_2(R) \rightarrow R^3$ بحيث ان المجموعة $S = \left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}$ تكون قاعدة لنواته .

13 ـــ اعتبر C^2 فضاء متجهات على الحقل R ثم جد تحويلاً خطياً $T: C^2 \rightarrow P_2(R)$ بحيث ان المجموعة $S = \{A_1 = (i,1), A_2 = (0,-i)\}$ تكون قاعدة لنواته والمجموعة $H = \{B_1 = 1 + x, B_2 = -2x^2\}$ تكون قاعدة لصورته .

(2.3) التحويلات النظيرة Inverse transformations

سندرس في هذا البند تركيب التحويلات الخطية والتي سنعتمد عليها في تعريف التحويلات النظيرة . ستؤدي هذه الدراسة الى معرفة خصائص اضافية

للتحويلات الخطية وكذلك تؤدي الى تصنيف فضاءات المتجهات .

تعريف :

اذا كان كل من W, V, U فضاء متجهات على الحقل F ، واذا كان كل من $V \rightarrow W$ ، $S:U \rightarrow V$ ، $T:V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً . فإنه بالامكان تعريف دالة :

$T \circ S : U \rightarrow W$ بالصيغة : $ToS(A) = T(S(A))$

هذه الدالة تسمي تركيب الدالتين T,S (Composition of S, T) .

مثال (1) :

جد تركيب الدالتين $S:R^2 \rightarrow R^3$ ، $T:R^3 \rightarrow R$ المعرفتين بالصيغتين $T(x,y,z) = x-y+z,\ S(x,y) = (2x,y,o)$.

الحل : التركيب ToS يكون دالة من R^2 الى R معرفة بالصيغة

$$
\begin{aligned}
ToS(x,y) &= T(S(x,y)) \\
&= T(2x, y, o) \\
&= (2x) - (y) + (o) \\
&= 2x - y
\end{aligned}
$$

ملاحظـة :

في المثال اعلاه ، التركيب SoT لايكون معرفاً وذلك لان المجال المقابل للدالة T لايساوي مجال الدالة S .

مبرهنـة (2.3.1) :

لاي تحويلين خطين $S:U \rightarrow V$ ، $T:V \rightarrow W$ يكون التركيب $ToS : U \rightarrow W$ ايضا تحويلا خطياً .

البرهان :

لنأخذ A_1, A_2 اي متجهين في U، r اي عدد قياسي ، فيكون لدينا :

$$\begin{aligned} ToS(A_1 + A_2) &= T(S(A_1 + A_2)) \\ &= T(S(A_1) + S(A_2)) \\ &= T(S(A_1)) + T(S(A_2)) \\ &= ToS(A_1) + ToS(A_2) \end{aligned}$$

كذلك يكون لدينا

$$\begin{aligned} ToS(rA_1) &= T(S(rA_1)) = T(rS(A_1)) \\ &= rT(S(A_1)) = r\,ToS(A_1) \end{aligned}$$

بذلك تكون الدالة ToS تحويلاً خطياً .

(و . هـ . م)

لقد ذكرنا في مثال (4) من البند (2.1) ان الدالة المحايدة على فضاء متجهات تكون تحويلاً خطياً على ذلك الفضاء. سوف نرمز لتلك الدالة برمز خاص في التعريف التالي :

تعريف :

لاي فضاء متجهات V على حقل F . التحويل $1_V : V \rightarrow V$ المعرف بالصيغة : $1_V(A) = A$ ، لجميع المتجهات $A \in V$ ، يسمى بالتحويل المحايد على V. (Identity transformation on V).

تعريف :

اذا كان كل من $T:V \rightarrow W$ ، $S:W \rightarrow V$ تحويلاً خطياً فنعرف النظير الايمن والايسر كما يأتي :

(أ) اذا كان $SoT = 1_V$ فإن S يسمى نظير ايسر الى T .
(left inverse)

(ب) اذا كان $ToS = 1_w$ فإن S يسمى نظير ايمن الى T .
(right inverse)

ملاحظـة :

اذا كان S نظيراً يسارياً الى T فإن T يكون نظيراً يمينياً الى S كذلك فإنه اذا كان S نظيراً يمينياً الى T **فإن** T يكون نظيراً يسارياً الى S .

مثال (2) :

اذا كان $T:R^2 \mapsto R^3$ التحويل الخطي المعرف بالصيغة :

$$T(x,y) = (x,x+2y, x-y)$$

فبرهن على ان التحويل الخطي $S:R^3 \rightarrow R^2$ المعرف بالصيغة :

$$S(x,y,z) = (x,y-2x+z)$$

يكون نظيراً يسارياً الى T ، لكن لايكون نظيراً يمينياً .

الحل : المطلوب برهانه هو ان $SoT = 1_{R^2}$ ، اي ان $SoT(x,y) = (x,y)$.

$$SoT(x,y) = S(T(x,y)) = S(x,x+2y, x-y)$$
$$= (x,(x+2y) - 2(x) + (x-y))$$
$$= (x,y)$$

الان : $ToS: R^3 \rightarrow R^3$ يكون معرفاً بالصيغة .

$$ToS(x,y,z) = T(S(x,y,z)) = T(x,y-2x+z)$$
$$= (x,x+2(y-2x+z), x-(y-2x+z))$$
$$= (x, -3x+2y+2z, 3x-y-z)$$

من هنا نلاحظ ان $ToS(x,y,z) \neq (x,y,z)$ ، اي ان $ToS \neq 1_{R^3}$ وبذلك لايمكن لـ S ان يكون نظيراً يمينياً .

تعريف :

اذا كان كل من $T:V \to W$ ، $S:W \to V$ تحويلاً خطياً فإن S يسمى نظيراً الى T(Inverse) اذا وفقط اذا كان S نظيراً يمينياً ويسارياً الى T .

ملاحظـة :

اذا كان S نظيراً الى T فإن T يكون نظيراً الى S .

مثال (3) :

اذا كان $T:M_2(R) \to R^4$ التحويل الخطي المعرف بالصيغة :

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (-b, a, (1/5)c, (1/2)d)$$

فبرهن على ان التحويل الخطي $S:R^4 \to M_2(R)$ المعرف بالصيغة :

$$S(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} y & -x \\ 5z & 2w \end{bmatrix}$$

يكون نظيراً الى T .

الحل : يجب ان نبرهن على ان S يكون نظيراً يسارياً ويمينياً الى T . هذا يعني انه يجب البرهنة على ان $SoT = 1_{M_2(R)}$ ، $ToS = 1_{R^4}$

$$SoT\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = S\left(T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

$$= S(-b, a, (1/5)c, (1/2)d)$$

$$= \begin{bmatrix} a & --b \\ 5(1/5c) & 2(1/2)d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

اذن $SoT = 1_{M_2(R)}$. الآن نبرهن ان $SoT = 1_{R^4}$.

$$SoT(x,y,z,w) = S(T(x,y,z,w))$$

$$= S\begin{bmatrix} y & -x \\ 5z & 2w \end{bmatrix}$$

$$= (-(-x)\ ,\ y,(1/5)(5z),(1/2)(2w))$$

$$= (x,y,z,w)$$

مبرهنة (2.3.1) :

ليكن $T:V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً . اذا امتلك T نظيراً يسارياً ونظيراً يمينياً فيجب عليهما التساوي . اي انه اذا وجد تحويلين $S,S':W \rightarrow V$ بحيث $SoT = 1_V$ و $ToS' = 1_W$ فإن $S = S'$.

البرهان :

$$S = So\,1_W = So(ToS')$$

$$= (SoT)o\,S' = 1_V o\,S' = S'$$

(و . هـ . م)

تعريف :

يسمى التحويل الخطي $T:V \rightarrow W$ تحويلاً غير معتلاً (non - Singular) و تشاكل (Isomorphism) اذا وفقط اذا وجد تحويلاً خطياً $S:W \rightarrow V$ يحقق : $SoT = 1_V$ و $ToS = 1_W$. عندئذ نكتب $S = T^{-1}$ ونسميه نظير T .

المبرهنة (2.3.1) تضمن وجود نظير واحد فقط ان وجد .

تعريف :

اذا وجد تشاكل $T:V \rightarrow W$ بين الفضاءين V , W فنقول بأن الفضاء V يشاكل الفضاء W . (V is isomorphic toW) .

قبل اعطاء امثلة على مفهوم التشاكل، سوف نذكر بعض المبرهنات التي تفيدنا في انشاء التشاكلات، وفي تحقيق بعض ماسندعيه في الامثلة .

مبرهنة (2.3.2) :

ليكن $T:V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً . اذا وجدت دالة $S: W \rightarrow V$ تحقق : $SoT = 1_V$ و $ToS = 1_w$، فيجب على S ان تكون تحويلاً خطياً .

البرهان :

لنأخذ B_1, B_2 اي متجهين في W, r اي عدد قياسي، المطلوب برهانه ان :

$$S(B_1 + B_2) = S(B_1) + S(B_2)$$
$$S(rB_1) = rS(B_1)$$

ضع : $S(B_1) = A_1$, $S(B_2) = A_2$، ثم لاحظ

$$B_1 = 1_w(B_1) = ToS\,(B_1) = T(S(B_1)) = T(A_1)$$

وبالطريقة نفسها نحصل على $B_2 = T(A_2)$. وذلك لان $ToS = 1_w$ بالفرض .
العلاقات : $B_1 = T(A_1)$, $B_2 = T(A_2)$, $SoT = 1_v$ تنتج مايلي :

$$\begin{aligned} S(B_1 + B_2) &= S(T(A_1) + T(A_2)) \\ &= S\,(T(A_1 + A_2)) \\ &= SoT\,(A_1 + A_2) \\ &= 1_v\,(A_1 + A_2) = A_1 + A_2 \\ &= S(B_1) + S(B_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(rB_1) &= S(rT(A_1)) = S(T(rA_1)) = SoT\,(rA_1) \\ &= 1_v(rA_1) = rA_1 = rS(B_1) \end{aligned}$$

بذلك تكون الدالة S تحويلاً خطياً .

(و . هـ . م)

المبرهنة التالية تفيدنا في المسائل العملية وتدلنا على الطريقة لايجاد النظير الايمن والنظير الايسر للتحويل الخطي بين الفضاءات المنتهية البعد .

مبرهنة (2.3.3) :

اذا كان $T:V \to W$ تحويلاً خطياً بين الفضاءين المنتهيين البعد V و W فإن :

(أ) يوجد الى T نظير ايمن اذا وفقط اذا كان T شاملاً .

(ب) يوجد الى T نظير ايسر اذا وفقط اذا كان T متبايناً .

البرهان :

(أ) لنفرض ان $S:W \to V$ نظير ايمن الى T. عندئذ يكون لدينا $ToS = 1_w$. يجب ان نبرهن على ان T يكون تحويلاً شاملاً . لهذا الغرض نأخذ $B \in W$ اي متجه ونضع $A = S(B)$ ونلاحظ ان :

$$T(A) = T(S(B)) = ToS(B) = 1_w(B) = B$$

اذن يكون T تحويلاً شاملاً . على العكس، لنفرض ان $T:V \to W$ تحويلاً شاملاً . يجب علينا ايجاد تحويل خطي $S:W \to V$ يحقق $ToS = 1_w$.

ليكن $\dim(V) = m, \dim W = n$. بما ان T تحويل شامل ، اذن : $\dim(ImT) = \dim W = n$. المبرهنة (2.2.2) تنتج ان :

$$\dim(KerT) = \dim(V) - \dim(ImT) = m\text{-}n$$

وعليه نأخذ قاعدة الى KerT ولتكن $\{A_1, \ldots, A_{m-n}\}$ ونوسعها الى قاعدة , $\{A_1, \ldots, A_{m-n}, B_1, \ldots, B_n\}$ الى V .

ضع : $C_1 = T(B_1), \ldots, C_n = T(B_n)$ ولاحظ ان $\{C_1, \ldots, C_n\}$ تكون قاعدة الى $W = ImT$ (راجع اثبات المبرهنة (2.2.2) . نعرف الآن التحويل الخطي $S: W \to V$ على عناصر القاعدة ومن ثم نعرف قيمته على اي متجه في W كما في

مبرهنة (2.1.2) .

$$S(C_1) = B_1, \dots, S(C_n) = B_n$$

ولأي متجه $B \in W$ نكتب

$$B = y_1C_1 + \dots + y_nC_n$$

ويكون :

$$S(B) = y_1B_1 + \dots + y_nB_n$$

والان نبرهن على ان التحويل S اعلاه يكون نظيراً يمينياً الى T . لأي متجه $B = y_1C_1 + \dots + y_nC_n$ في W، يكون لدينا :

$$\begin{aligned} ToS(B) = T(S(B)) &= T(y_1B_1 + \dots + y_nB_n) \\ &= y_1T(B_1) + \dots + y_nT(B_n) \\ &= y_1C_1 + \dots + y_nC_n \\ &= B \end{aligned}$$

هذا يكمل برهان (أ) .

(ب) لنفرض ان $S:W \rightarrow V$ نظير ايسر الى T .

عندئذ يكون : $SoT = 1_v$. يجب البرهنة على ان T يكون متبايناً .

لنفرض ان $T(A_1) = T(A_2)$. بتطبيق S على الطرفين نحصل على :

$$S(T(A_1)) = S(T(A_2))$$

$$SoT(A_1) = SoT(A_2)$$

$$1_v(A_1) = 1_v(A_2)$$

$$A_1 = A_2$$

لنفرض الان ان T تحويلاً متبايناً . ولنفرض ان $\dim(V) = m, \ \dim(W) = n$.
بتطبيق المبرهنة (2.2.3) نحصل على آن $KerT = \{O\}$ وعليه فإن المبرهنة (2.2.2) تنتج :

$$\dim(ImT) = \dim(V) - \dim(KerT) = m - o = m$$

نختار قاعدة $\{A_1, \dots, A_m\}$ الى V ثم نضع :

$$B_1 = T(A_1), \dots, B_m = T(A_m)$$

مجموعة المتجهات $\{B_1, \dots, B_m\}$ تكون مجموعة مستقلة خطياً وذلك لانه اذا اخذنا $y_1B_1 + \dots + y_mB_m = O$ تركيباً خطياً مساوياً للصفر فبالتعويض نحصل على :

$$y_1T(A_1) + \dots + y_mT(A_m) = O$$
$$T(y_1A_1 + \dots + y_mA_m) = O$$

هذا يعني ان $y_1A_1 + \dots + y_mA_m \in \text{Ker } T$.لكن T متباين وهذا يعني ان $\text{KerT} = \{O\}$ كما ذكرنا سابقاً . أذن

$$y_1A_1 + \dots + y_mA_m = O$$

لكن $\{A_1, \dots, A_m\}$ مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات وذلك لكونها قاعدة الى V . اذن $y_1 = y_2 = \dots = y_m = o$. الان $\{B_1, \dots, B_m\}$ مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات في W . نوسعها الى قاعدة $\{B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_{n-m}\}$ الى W

نعرف الان التحويل الخطي $S: W \rightarrow V$ على عناصر القاعدة اعلاه وذلك بأخذ .

$$S(B_1) = A_1, \dots, S(B_m) = A_m$$
$$S(C_1) = O \quad \dots, S(C_{n-m}) = O$$

ولمعرفة قيمة S على اي متجه $B \in W$ ، نكتب :

$$B = x_1B_1 + \dots + x_mB_m + y_1C_1 + \dots + y_{n-m}C_{n-m}$$

وكما في مبرهنة (2.1.2) يكون

$$S(B) = x_1A_1 + \dots + x_mA_m + y_1 O + \dots + y_{n-m} \cdot O$$
$$= x_1A_1 + \dots + x_mA_m$$

الان نبرهن على ان S يكون نظيراً يسارياً الى T . اي ان $SoT = 1_v$.
لنأخذ $A = r_1A_1 + \dots + r_mA_m$ اي متجه في V . بأستخدام تعريف S اعلاه نحصل على :

$$SoT(A) = S(T(A)) = S(r_1T(A_1) + \dots + r_m T(A_m))$$
$$= S(r_1B_1 + \dots + r_mB_m)$$
$$= r_1A_1 + \dots + r_mA_m = A$$

هذا يكمل برهان (ب).

(و . هـ . م)

نتيجة (2.3.4):

اذا كان $T:V \to W$ تحويلاً خطياً بين فضاءين منتهيي البعد فإن T يكون تحويلاً غير معتل (تشاكل) اذا وفقط اذا كان T متبايناً ($KerT = \{O\}$) و شاملاً ($ImT = W$) .

البرهان :

افرض ان T تحويل غير معتل . عندئذ يوجد تحويل خطي $S:W \to V$ يحقق $SoT = 1_V$ و $ToS = 1_W$. العلاقة الاولى تنص على ان S نظير ايسر وبالتالي فإن T يكون متبايناً حسب المبرهنة (2.3.3) والعلاقة الثانية تنص على ان S نظير ايمن الى T وبالتالي فإن T يكون شاملاً .

على العكس اذا كان T متبايناً وشاملاً فإن المبرهنة (2.3.3) تنص على وجود نظير ايسر وآخر ايمن الى T وبالتالي وحسب المبرهنة (2.3.1) نستنتج على تساوي النظيرين وبالتالي يكون T تحويلاً غير معتل .

(و . هـ . م)

المبرهنة (2.3.3) تفيد بمعرفة وجود التحويلات النظيرة وكذلك فإنها تعطي الطريقة العملية لايجادها . سوف نذكر الان عدة امثلة على الافكار التي طرحناها في هذا البند .

مثال (4) :

برهن على وجود نظير ايمن للتحويل الخطي $T:R^3 \to R^2$ المعرف بالصيغة : $T(x,y,z) = (x+y, 2x-z)$

ثم جد واحداً .

الحل : اذا كان T شاملاً فسوف يوجد له نظير ايمن وذلك حسب مبرهنة (2.3.3) . نلاحظ اولاً .

$T(x,y,z) = x(1,2) + y(1,0) + z(0,-1)$

وهذا يعني ان ImT يولد من قبل مجموعة المتجهات $\{(1,2), (1,0), (0,-1)\}$ وبما

أن هذه المجموعة تحتوي على المجموعة المستقلة خطياً $\{(0,-1) , (1,0)\}$ فإن $\dim(ImT) = 2$ وبذلك يكون T تحويلاً شاملاً.

لايجاد نظير ايمن نتبع الخطوات التي وردت في برهان مبرهنة (2.3.3)(أ)

اولاً : نجد قاعدة الى KerT . لهذا الغرض ضع

$$T(x,y,z) = (x+y, 2x-z) = (0,0)$$

فنحصل على المعادلتين :

$$x + y = o$$

$$2x - z = o$$

والحل سيكون : $x = x,\ y = -x,\ z = 2x$ وبأخذ $x = 1$ نحصل على المتجه $A_1 = (1,-1,2)$ الذي يكون قاعدة الى KerT . نوسع هذه القاعدة الى قاعدة الى R^3 فمثلاً المجموعة $\{A_1 = (1,-1,2),\ B_1 = (1,0,0),\ B_2 = (0,1,0)\}$ ستكون قاعدة الى R^3 .

ثانياً نضع :

$$C_1 = T(B_1) = T(0,1,0) = (1,2)$$

$$C_2 = T(B_2) = T(0,1,0) = (1,0)$$

والان نحاول كتابة المتجه العام $(x,y) \in R^2$ كتركيب خطي من متجهات القاعدة $\{C_1, C_2\}$ الى R^2 .

$$(x,y) = a(1,2) + b(1,0)$$
$$= (a+b, 2a)$$

فنحصل على :

$$b = x-(1/2)y,\ a = (1/2)y$$

والان نعرف التحويل الخطي $S: R^2 \to R^3$ كالاتي :

$$S(x,y) = (1/2)y\,(B_1) + (x-(1/2)y)B_2$$
$$= (1/2)y\,(1,0,0) + (x-(1/2)y)\,(0,1,0)$$
$$= ((1/2)y,\ x-(1/2)y,\ o)$$

والان القارىء مدعو لتحقيق كون S نظيراً يمينياً للتحويل T .

ملاحظـة :

في حل المثال اعلاه كان اختيار B_1, B_2 عشوائياً بشرط ان تكون المجموعة $\{A_1, B_1, B_2\}$ قاعدة الى R^3 . كذلك فأن اي اختيار آخر سيؤدي الى نظير ايمن آخر .

مثال (5) :

برهن على وجود نظير ايسر للتحويل الخطي $T:P_1(R) \rightarrow R^3$ المعرف بالصيغة .

$$T(a + b\,x) = (a, -b, 2a)$$

ثم جد واحداً .

الحل : لكي يوجد نظيراً يسارياً للتحويل T يجب ان يكون متبايناً وهذا يكافىء كون $KerT = \{O\}$. فإذا وضعنا

$$T(a + bx) = (a, -b, 2a) = (0,0,0)$$

فنحصل على $b = o, a = o$. بذلك يكون $KerT = \{O\}$.

لايجاد نظير ايسر نتبع خطوات البرهان للمبرهنة (2.3.3) (ب) . نختار قاعدة الى $P_1(R)$ ولتكن القاعدة الطبيعية $\{A_1 = 1, A_2 = x\}$.ضع

$$B_1 = T(A_1) = T(1) = (1,0,2)$$
$$B_2 = T(A_2) = T(x) = (0,-1,0)$$

الان المجموعة $\{B_1 = (1,0,2), B_2 = (0,-1,0)\}$ تكون مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات في R^3 . نوسعها الى قاعدة $\{B_1, B_2, C_1 = (0,0,1)\}$ الى R^3 .

بذلك نعرف التحويل الخطي $S:R^3 \rightarrow P_1(R)$ على عناصر القاعدة

$$S(B_1) = A_1 = 1$$
$$S(B_2) = A_2 = x$$
$$S(C_1) = O$$

ولايجاد $S(y_1, y_2, y_3)$، نكتب (y_1, y_2, y_3) كتركيب خطي من المتجهات B_1, B_2, C_1 فنحصل على :

$$(y_1, y_2, y_3) = a(1,0,2) + b(0,-1,0) + c(0,0,1)$$
$$= (a, -b, 2a + c)$$

والحل سيكون : $c = y_3 - 2y_1,\ b = -y_2,\ a = y_1$ وعليه نحصل على

$$S(y_1, y_2, y_3) = aA_1 + bA_2 + C.\ 0$$
$$= a(1) + b(x)$$
$$= y_1 + (-y_2)x$$
$$= y_1 - y_2 x$$

والقاريء مدعو لتحقيق كون S نظيراً يسارياً الى T .

مثال (6) :

برهن على ان الفضاءين $P_n(R)$ و R^{n+1} **متشاكلان** وذلك لاي عدد طبيعي n .

الحل : نعرف التحويل الخطي $T: P_n(R) \to R^{n+1}$ بالصيغة

$$T(a_0 + a_1x + \dots + a_n x) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$$

ثم نبرهن على ان T يكون تشاكلاً ولهذا الغرض نعرف التحويل الخطي $S: R^{n+1} \to P_n(R)$ بالصيغة

$$S(b_1, \dots, b_{n+1}) = b_1 + b_2x + \dots + b_{n+1}x^n$$

والان القاريء مدعو لتحقيق ان $S = T^{-1}$، اي ان S نظير T .

ان فكرة تشاكل الفضاءات بسيطة، فمثلاً الفضاءات $M_2(R), P_3(R), R^4$ تكون عناصرها بالصيغة :

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3(R),\ (a, b, c, d) \in R^4$$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 (R)$. نلاحظ ان كل متجه من هذه المتجهات يتحدد بأربعة أعداد حقيقية a, b, c, d مرتبة بصيغة معينة . من الامثلة السابقة نلاحظ ان بعد كل من هذه الفضاءات يساوي 4 ، وبالتالي تشترك بصفة واحدة . ويكون اي اثنين منهما متشاكلين .

المبرهنة التالية تصنف الفضاءات المنتهية البعد وعلى الحقل نفسه .

مبرهنة (2.3.5) :

اذا كان كل من W, V فضاء متجهات منتهي البعد وعلى الحقل F نفسه فإن V يشاكل W اذا وفقط اذا $\dim V = \dim W$.

البرهان :

لنفرض ان V يشاكل W. اذن يوجد تشاكل $T:V \rightarrow W$. النتيجة (2.3.4) تؤدي الى: $KerT = \{O\}$ و $ImT = W$. والمبرهنة (2.2.2) تؤدي الى :

$$\dim (V) = \dim (KerT) + \dim (ImT)$$
$$= O + \dim (W) = \dim W$$

على العكس لنفرض ان $n = \dim (V) = \dim(W)$. نختار قواعد الى كل من V و W ولتكن $\{A_1, \ldots, A_n\}$ قاعدة الى V و $\{B_1, \ldots, B_n\}$ قاعدة الى W . المبرهنة (2.1.2) تنص على وجود تحويل خطي فقط $T:V \rightarrow W$ يحقق :

$$T(A_1) = B_1, \ldots, T(A_n) = B_n$$

ولأي متجه $A = x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$ في V يكون

$$T(A) = x_1B_1 + \ldots + x_nB_n$$

هذا التحويل الخطي يجب ان يكون تشاكلاً وذلك لانه بالامكان تعريف

$$S:W \rightarrow V$$

بالصيغة $S(B) = S(y_1B_1 + \ldots + y_nB_n) = y_1A_1 + \ldots + y_nA_n$

وبالتالي يكون S نظيراً الى T .

(و. هـ . م)

بمراجعة بعد الفضاءات نحصل على النتائج التالية .

مثال (7)

(أ) **الفضاءان** R^{n^2} ، $M_n(R)$ متشاكلين وذلك لاي عدد طبيعي n .

(ب) الفضاء C^n على الحقل R يشاكل الفضاء R^{2n} الذي بدوره يشاكل الفضاء $P_{2n-1}(R)$. وذلك لاي عدد طبيعي n .

(ج) الفضاء C^{n+1} على الحقل C يشاكل الفضاء $P_n(C)$ على الحقل C وذلك لأي عدد طبيعي n .

مثال (8) :

اختبر التحويلين الخطيين التاليين من ناحية التشاكل . ثم جد نظير التشاكل .

$T_1 : R^3 \rightarrow R^3$ ، $T_1(x,y,z) = (x, y, z-x)$

$T_2 : R^3 \rightarrow R^3$ ، $T_2(x,y,z) = (x, y, x+y)$

الحل : نعتمد على نتيجة (2.3.4) في الاجابة . نحاول حساب $KerT_2$, $KerT_1$. حسابات بسيطة كالسابق تظهر ان :

$$KerT_1 = \{O\}, KerT_2 = \{(x,y,z) : x = o, y = o, z = z\}$$

عليه فأن T_2 لايكون تشاكلاً في حين ان مبرهنة (2.2.2) تنص على ان :

$$\dim(ImT_1) = 3 - \dim KerT_1 = 3 - o = 3$$

وبالتالي يكون T_1 متبايناً وشاملاً وعليه يكون تشاكلاً .

لايجاد نظير T_1، نتبع احدى الطرق في مثال (5) او مثال (4) وذلك لان اي نظير ايسر الى T_1، سوف يساوي اي نظير ايمن وذلك حسب مبرهنة (2.3.1) . نأخذ اولاً قاعدة مثل القاعدة الطبيعية .

$$\{A_1 = (1,0,0), A_2 = (0,1,0), A_3 = (0,0,1)\}$$

نضع

$$B_1 = T_1(A_1) = T_1(1,0,0) = (1,0,-1)$$

$$B_2 = T_1(A_2) = T_1(0,1,0) = (0,1,0)$$

$$B_3 = T_1(A_3) = T_1(0,0,1) = (0,0,1)$$

والان نكتب (x,y,z) كتركيب خطي من B_1, B_2, B_3.

$$(x,y,z) = a(1,0,-1) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$
$$= (a, b, c-a)$$
$$a = x, b = y, c = z + x$$

نعرف التحويل الخطي $S:R^3 \rightarrow R^3$ بالصيغة

$$S(x,y,z) = aA_1 + bA_2 + cA_3$$
$$= xA_1 + yA_2 + (z + x) A_3$$
$$= x(1,0,0) + y(0,1,0) + (z + x)(0,0,1)$$
$$= (x, y, z + x)$$

هذا هو نظير T_1، اي يمكننا ان نكتب

$$T_1^{-1}(x,y,z) = (x,y,z+x)$$

مبرهنة (2.3.6) :

اذا كان كل من $T_1:U \rightarrow V$ ، $T_2:V \rightarrow W$ تشاكلاً فإن التركيب $T_2oT_1:U \rightarrow W$ يكون تشاكلاً و $(T_2oT_1)^{-1} = T_1^{-1}o\,T_2^{-1}$.

البرهان :

توجد تحويلات نظيرة $S_1:V \rightarrow U$ ، $S_2:W \rightarrow V$ بحيث ان :
$S_1oT_1 = 1_U$ و $T_1oS_1 = 1_V$ و $S_2oT_2 = 1_V$ و $T_2oS_2 = 1_W$.

ضع : $S = S_1oS_2: W \rightarrow V$

لاحظ ان S تحويلاً خطياً ويحقق

$$(T_2 \circ T_1) \circ S = (T_2 \circ T_1) \circ (S_1 \circ S_2)$$
$$= T_2 \circ (T_1 \circ S_1) \circ S_2$$
$$= T_2 \circ (1_v \circ S_2) = T_2 \circ S_2 = 1_w$$

وبالطريقة نفسها اعلاه يمكن البرهنة على ان $S \circ (T_2 \circ T_1) = 1_U$ عندئذ يكون S نظير الى $T_2 \circ T_1$ وهذا يعني ان $T_2 \circ T_1$ يكون تشاكلاً .

ان $S_1 = T_1^{-1}$ و $S_2 = T_2^{-1}$ و S نظير الى $T_2 \circ T_1$ ، اذن .

$(T_2 \circ T_1)^{-1} = S = S_1 \circ S_2 = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

(و . هـ . م)

تمارين (2.3)

1 ــ جد جميع التركيبات الممكنة في كل ممايلي :

(أ) $S: R \rightarrow R^3$ ، $T: R^3 \rightarrow M_2(R)$ حيث
$S(t) = (2t, -t, o)$ ، $T(x,y,z) = \begin{bmatrix} -x & y-z \\ z & 2x \end{bmatrix}$.

(ب) $S = R^2 \rightarrow R^2$ ، $T: R^2 \rightarrow R^2$
$S(x,y) = (o, -x+3y)$ ، $T(x,y) = (x+y, 2x-3y)$.

(ج) $S: C^2 \rightarrow C^2$ ، $T: C^2 \rightarrow P_1(C)$
$S(z_1, z_2) = (z_1 + z_2, iz_1)$ ، $T(z_1, z_2) = 2z_1 - iz_1x$.

(د) $S: R^2 \rightarrow R^3$ ، $T: R^3 \rightarrow R^2$
$S(x,y) = (x-2y, 3x, 2y)$ ، $T(x,y,z) = (o, x+y-z)$.

2 ــ اذا كان V فضاء متجهات منتهي البعد و $T: V \rightarrow V$ تحويلاً خطيا فبرهن على ان $KerT \subset KerT^2$ و $ImT \supset ImT^2$ حيث :
$T^2 = T \circ T$

3 ــ اذا كان كل من $S: U \rightarrow V$ و $T: V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً بحيث $KerS = \{O\}$ ، $KerT = \{O\}$ فبرهن على ان $Ker(T \circ S) = \{O\}$.

4 ــ اذا كان V فضاء متجهات و $T_1, T_2: V \rightarrow V$ تحويلين خطيين على V ، بحيث :

(أ) (التحويل المحايد) $T_1 + T_2 = I$.
(ب) $T_1 o T_2 = O$ و $T_2 o T_1 = O$.
(ج) $T_1 o T_1 = T_1$ و $T_2 o T_2 = T_2$
برهن على ان $V = ImT_1 \oplus ImT_2$.

5 ـ اذا كان $T: R^2 \rightarrow R^2$ تحويلاً خطياً بحيث $T \neq O$ لكن $ToT = O$ فبرهن على وجود قاعدة $\{A, B\}$ الى R^2 بحيث $T(B) = O$ و $T(A) = B$.

6 ـ جد ان امكن نظير ايمن او نظير ايسر لكل من التحويلات الخطية التالية وقرر فيما اذا كان التحويل غير معتلاً .

(أ) $T: R^3 \rightarrow R^2$ ، $T(x,y,z) = (x+y, y-2z)$.
(ب) $T:P_1(R) \rightarrow R^4$ ، $T(a + bx) = (a, b, -2b, a+b)$.
(ج) $T:R^3 \rightarrow R^3$ ، $T(x,y,z) = (x+y, 2x+2y-3z, 15z)$.
(د) $T: C^2 \rightarrow C^2$ ، $T(z_1,z_2) = (iz_1, 2z_1 - z_2)$. اعتبر C^2 فضاء متجهات على الحقل C .

7 ـ جد نظير كل من التحويلات التالية :

(أ) $T:R^3 \rightarrow R^3$ ، $T(x,y,z) = (x-y, x+z, x+y+2z)$.
(ب) $T:R^3 \rightarrow R^3$ ، $T(x,y,z) = (2x-y+z, x+y, 3x+y+z)$.

8 ـ اذا كان $T:V \rightarrow V$ تحويلاً خطياً بحيث $T^2 = ToT = O$ فبرهن على ان $T - I$ يكون تحويلاً غير معتلاً . (I = التحويل المحايد، O = التحويل الصفري) .

9 ـ اذا كان $T:V \rightarrow \overline{V}$ تحويلاً خطياً بحيث $T^2 - T + I = O$ فبرهن على ان T^{-1} موجود ويساوي $I - T$.

10 ـ اذا كان $T:V \rightarrow V$ تحويلاً خطياً بحيث $T^2 + 2T + I = O$. فجد T^{-1} .

11 ـ اذا كان $T:V \rightarrow V$ تحويلاً خطياً بحيث $T^2 = T$ واذا كان $M = ImT$ ، $N = KerT$ فبرهن على ان $V = M \oplus N$.

(ارشاد : لكي نبرهن على ان $V = M + N$ ، اكتب متجه $A \in V$ بالصيغة $A = A - T(A) + T(A)$) .

(2.4) مصفوفة التحويل الخطي

Matrix of a Linear transformation

يوضح هذا البند العلاقة بين التحويلات الخطية والمصفوفات وسنفترض لدى القارىء الالمام بجبر المصفوفات وخصائصها الرئيسة .

اذا كان كل من V و W فضاء متجهات منتهي البعد وعلى الحقل F نفسه بحيث ان $\dim V = m$ و $\dim W = n$ ، واذا كان $T; V \to W$ تحويلاً خطياً فإنه بالامكان ايجاد مصفوفة $m \times n$ عناصرها من الحقل F وتعتمد اعتماداً كلياً على التحويل الخطي T وعلى القواعد المختارة الى كل من V و W وعلى النحو التالي .

لنفرض ان $H = \{A_1, \ldots, A_m\}$ قاعدة الى V وان $S = \{B_1, \ldots, B_n\}$ قاعدة الى W . الان لكل $i:1,\ldots,m$ يكون $T(A_i)$ متجهاً في W وبالتالي يمكن كتابته كتركيب خطي من المتجهات $B_1, \ldots, B_n$ وبطريقة واحدة فقط . اذا وضعنا :

$$
\begin{aligned}
T(A_1) &= a_{11}B_1 + \ldots + a_{1n}B_n \\
T(A_2) &= a_{21}B_1 + \ldots + a_{2n}B_n \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (2.4.1) \\
T(A_m) &= a_{m1}B_1 + \ldots + a_{mn}B_n
\end{aligned}
$$

فنحصل على مصفوفة :

$$
M_T = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

علاقة هذه المصفوفة بالتحويل الخطي T وبالقواعد H و S موضحة في المبرهنة التالية :

مبرهنة (2.4.2) :

اذا كان $X = (x_1, \ldots, x_m)$ متجه احداثيات $A \in V$ بالنسبة للقاعدة $H = \{A_1, \ldots, A_m\}$ و $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ متجه احداثيات $T(A)$ بالنسبة للقاعدة $S = \{B_1, \ldots, B_n\}$ فإن مصفوفة التحويل الخطي $T: V \to W$ بالنسبة للقواعد H و S والمستخرجة في (2.4.1) تحقق :

$$Y = X M_T$$

البرهان :

اذا كان $X = (x_1, \ldots, x_m)$ متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة $H = \{A_1, \ldots, A_m\}$ فإن $A = x_1 A_1 + \ldots + x_m A_m$. بما ان $T: V \to W$ تحويلاً خطياً فعليه يكون $T(A) = x_1 T(A_1) + \ldots + x_m T(A_m)$. الان نعوض عن كل $T(A_k)$، $k: 1, \ldots, m$ بما يساويه وحسب (2.4.1) اعلاه فنحصل على :

$$T(A) = x_1 \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} B_j\right) + \ldots + x_m \left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj} B_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} x_k a_{kj}\right) B_j$$

لكن $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ يمثل متجه احداثيات $T(A)$ بالنسبة للقاعدة $S = \{B_1, \ldots, B_n\}$ اي ان $T(A) = y_1 B_1 + \ldots + y_n B_n$.

إذن : $\sum_{j=1}^{n} y_j B_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} x_k a_{kj}\right) B_j$

بما ان كل متجه في W يمكن كتابته بطريقة واحدة فقط كتركيب خطي من متجهات القاعدة S، فعليه نستنتج على ان :

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} x_k a_{kj} \qquad j = 1, \ldots, n$$

جعة ضرب المصفوفات نحصل من النتيجة اعلاه على العلاقة

$$(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_m) \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2n} \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

وهذا يعني ان $Y = XM_T$.

(و . هـ . م)

ملاحظـة :

1 ــ في المبرهنة اعلاه اعتبرنا المتجهات X و Y على انها مصفوفات 1xm و 1xn على التوالي .

2 ــ بما ان متجه الاحداثيات بالنسبة لقاعدة معينة يعيين المتجه بصورة كلية فإن المبرهنة (2.4.2) توضح ان معرفة مصفوفة التحويل الخطي تعني معرفة التحويل كلياً وكما موضح في الامثلة أدناه .

مثال (1) :

ليكن $T:R^2 \rightarrow R^3$ تحويلاً خطياً معرفاً بالصيغة :

$$T(x,y) = (x, x+y, 2x\text{-}y)$$

جد مصفوفة T بالنسبة للقواعد الطبيعية الى كل من R^2 و R^3 .

الحل : القاعدة الطبيعية الى R^2 تتكون من المتجهات $A_1 = (1,0), A_2 = (0,1)$ والقاعدة الطبيعية الى R^3 تتكون من المتجهات , $B_2 = (0,1,0)$, $B_3 = (0,0,1)$, $B_1 = (1,0,0)$.

لغرض حساب مصفوفة التحويل الخطي T نتبع الخطوات المذكورة في (2.4.1) .

$$T(A_1) = T(1,0) = (1,1,2) = (1)\,B_1 + (1)\,B_2 + (2)\,B_3$$

$$T(A_2) = T(0,1) = (0,1,-1) = (0)\,B_1 + (1)\,B_2 + (-1)\,B_3$$

بذلك تكون مصفوفة T بالنسبة للقواعد الطبيعية كما يلي :

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال (2) :

اذا كان $T: P_2(R) \rightarrow R^2$ تحويلاً خطياً معرفاً بالصيغة :

$$T(a + bx + cx^2) = (2a, b - c)$$

فجد مصفوفة T بالنسبة للقاعدة $H = \{A_1 = 5, A_2 = 2x, A_3 = x^2\}$

الى $P_2(R)$ والقاعدة $\{B_1 = (-1,0), B_2 = (0,3)\} = S$ الى R^2 .

الحل :

$$T(A_1) = T(5) = (10,0) = (-10)\, B_1 + (0)\, B_2$$

$$T(A_2) = T(2x) = (0,2) = (0)\, B_1 + (2/3)\, B_2$$

$$T(A_3) = T(x^2) = (0,-1) = (0)\, B_1 + (-1/3)\, B_2$$

بذلك تكون مصفوفة T بالنسبة للقواعد اعلاه كما يلي :

$$M_T = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 2/3 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

مثال (3) :

جد التحويل الخطي $T:R^2 \rightarrow M_2(R)$ الذي مصفوفته بالنسبة للقاعدة $H = \{A_1 = (2,0), A_2 = (1,1)\}$ والقاعدة $\{B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\} = S$ تكون $M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

الحل : نستخلص طريقة الحل من المبرهنة (2.4.2) . المطلوب ايجاد $T(a,b)$. نحاول اولاً حساب متجه احداثيات (a,b) بالنسبة للقاعدة H ولهذا الغرض نكتب :

$$(a,b) = x(2,0) + y(1,1)$$

فنحصل على المعادلتين :

$$2x + y = a$$
$$y = b$$

وبهذا يكون : $x = (1/2)(a-b)$ ، $y = b$.

وعليه فإن متجه احداثيات (a,b) بالنسبة للقاعدة H يكون

$$X = ((1/2)(a-b), b)$$

بضرب هذا المتجه في المصفوفة M_T نحصل على متجه احداثيات $T(a,b)$ بالنسبة للقاعدة S وكما يلي :

$$Y = XM_T = ((1/2)(a-b), b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= ((1/2)(a+5b), (1/2)(a-b), (-1/2)(a-b), 2b)$$

بمعرفة متجه الاحداثيات بالنسبة الى قاعدة معينة يمكننا معرفة المتجه وكما يلي :

$$T(a,b) = (1/2)(a+5b)B_1 + (1/2)(a-b)B_2 - (1/2)(a-b)B_3 + 2bB_4$$

$$= (1/2)(a+5b)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (1/2)(a-b)\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - (1/2)(a-b)$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+5b & (3/2)(a-b) \\ (1/2)(a-b) & b \end{bmatrix}$$

مثال (4) :

جد مصفوفة التحويل الخطي $T: P_1(R) \rightarrow P_2(R)$ المعرف بالصيغة :

$$T(a+bx) = ax+bx^2$$

اولاً : بالنسبة للقواعد الطبيعية ثم بالنسبة لقاعدة $P_1(R)$ المكونة من المتجهات $A_1=2,\ A_2=1\text{-}x$ وقاعدة $P_2(R)$ المكونة من المتجهات $B_1=-1,\ B_2=3x,$ $B_3=-2x^2$.

الحل :

$$T(1) = 1.x \quad = 0+1.x+0.x^2$$
$$T(x) = x^2 \quad = 0+0.x+1.x^2$$

بذلك تكون مصفوفة T بالنسبة للقواعد الطبيعية كمايلي :

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نستخرج مصفوفة T بالنسبة للقواعد الجديدة كما يلي :

$$T(A_1) = T(2) = 2x \quad = 0.B_1 + (2/3)B_2 + 0.B_3$$

$$T(A_2) = T(1\text{-}x) = x\text{-}x^2 = 0.B_1 + (1/3)B_2 + (1/2)B_3$$

بذلك تكون مصفوفة T بالنسبة للقواعد المعطاة كما يلي :

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$$

المبرهنة التالية تحسب مصفوفة تركيب تحويلين خطيين .

مبرهنـــة (2.4.3) :

اذا كان كل من W, V, U فضاء متجهات منتهي البعد وعلى الحقل F نفسه واذا كانت $G=\{A_1, \ldots, A_m\}$ قاعدة الى U و $H=\{B_1, \ldots, B_n\}$ قاعدة الى V و $J=\{C_1, \ldots, C_p\}$ قاعدة الى W . اذا كان كذلك $T:U \rightarrow V$ و $S:V \rightarrow W$ تحويلين خطيين بحيث ان مصفوفة T بالنسبة للقواعد G و H تكون M_T ومصفوفة S بالنسبة للقواعد H و J تكون M_s . عندئذ تكون مصفوفة التركيب SoT بالنسبة للقواعد G و J عبارة عن حاصل الضرب $M_T . M_S$ ، اي ان

$$M_{SoT} = M_T . M_S$$

البرهان :

لنفرض ان $M_T = (a_{ij})$ ، $M_S = (b_{ij})$. عليه يكون لدينا :

$$S(B_j) = \sum_{l=1}^{p} b_{jl} C_l, \quad T(A_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} B_i$$

لغرض حساب مصفوفة التركيب SoT يتوجب علينا حساب $SoT(A_k)$ وذلك لكل $k: 1, \ldots, m$.

$$\begin{aligned} SoT(A_k) = S(T(A_k)) &= S(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ki} B_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ki} S(B_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ki} (\sum_{l=1}^{p} b_{il} C_l) \\ &= \textstyle\sum_{l=1}^{p} (\sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{il}) C_l \end{aligned}$$

الان لو وضعنا $c_{kl} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{il}$ لاصبحت المصفوفة المتكونة من العناصر c_{kl} عبارة عن مصفوفة التركيب SoT بالنسبة للقواعد G و J . لكن c_{kl} اعلاه يمثل العنصر في الموقع kl لحاصل الضرب $M_T . M_S$ وعليه يكون $M_{SoT} = M_T . M_S$.

(و . هـ . م)

مثال (5) :

اذا كانت $M_T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة التحويل الخطي

$T: R^2 \rightarrow R^4$ و $M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة

التحويل الخطي $S: R^4 \rightarrow R^3$ وذلك بالنسبة للقواعد الطبيعية الى كل من R^3 , R^4, R^2 فجد مصفوفة التحويل $SoT: R^2 \rightarrow R^3$.

الحل: حسب المبرهنة (2.4.3)، يتوجب علينا فقط ضرب المصفوفتين

$$M_T \text{ o } M_S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

عليه تكون مصفوفة التركيب SoT بالنسبة للقواعد الطبيعية .

$$M_{SoT} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

نتيجة (2.4.4) :

اذا كان كل من V و W فضاء متجهات منتهي البعد فإن اي تحويل خطي $T:V \rightarrow W$ يكون تشاكلاً اذا وفقط اذا كانت مصفوفة T بالنسبة لاي زوج من القواعد مربعة وقابلة للقلب .

البرهان :

لنفرض ان $T:V \rightarrow W$ يكون تشاكلاً بهذه الحالة فإن المبرهنة (2.3.5) تنتج ان $\dim V = \dim W$ وبذلك تكون مصفوفة T بالنسبة لاي زوج من القواعد مصفوفة مربعة . لنأخذ $E = \{A_1, ..., A_n\}$ قاعدة الى V و $F = \{B_1, ..., B_n\}$ قاعدة الى W . لنفرض ان M مصفوفة T بالنسبة لزوج القواعد F, E . بما ان T تشاكلاً . عليه يوجد تحويل خطي $S: W \rightarrow V$ يحقق :

$SoT = 1_v$ و $ToS = 1_w$.

لتكن N مصفوفة S بالنسبة لزوج القواعد E, F من المبرهنة (2.4.3) ينتج مايلي :

(أ) مصفوفة التركيب $SoT: V \rightarrow V$ بالنسبة لزوج القواعد E,E تساوي MN .

(ب) مصفوفة التركيب $ToS: W \rightarrow W$ بالنسبة لزوج القواعد F, F تساوي NM . بما ان $SoT = 1_W$ ، اذن .

$$SoT(A_k) = A_k = oA_1 + ... + oA_{k-1} + 1.A_k + oA_{k+1} + ... + 0.A_n$$

وذلك لكل $k: 1, ..., n$. عليه تكون مصفوفة SoT بالنسبة لزوج القواعد E , E مساوية للمصفوفة المحايدة I . اي ان $MN = I$. وبالطريقة نفسها ، العلاقة $ToS = 1_w$ تنتج $NM = I$ وعليه تكون المصفوفة M قابلة للقلب و $M^{-1} = N$.

لنفرض العكس، اي ان مصفوفة التحويل الخطي $T:V \rightarrow W$ بالنسبة لزوج من القواعد E,F عبارة عن مصفوفة مربعة M قابلة للقلب ولنفرض ان N مصفوفة تحقق $MN = I$ و $NM = I$.

ليكن $S: W \rightarrow V$ تحويلاً خطياً ناتجاً عن المصفوفة N بأستعمال زوج القواعد F, E بذلك تكون مصفوفة التركيب $SoT:V \rightarrow V$ بالنسبة لزوج القواعد E,E مساوية للمصفوفة **المحايدة** I وعليه اذا اخذنا اي متجه $A \in V$ وفرضنا ان متجه احداثياته بالنسبة للقاعدة E هو المتجه X فإن متجه احداثيات SoT(A) بالنسبة للقاعدة E يكون :

$$X(MN) = X.I = X$$

اي ان $SoT(A) = A$. وبالطريقة نفسها نبرهن على ان $ToS(B) = B$ لاي متجه $B \in W$. هذا يعني ان $SoT = 1_V$ و $ToS = 1_w$، اي ان T يكون تشاكلاً.

(و . هـ . م)

من النتائج الاخرى للمبرهنة (2.4.3) هي الحصول على خاصية لضرب المصفوفات والتي يكون برهانها صعباً وطويلاً اذا استخدمنا خصائص المصفوفات فقط.

نتيجة (2.4.5) :

اذا كانت كل من M و N مصفوفة مربعة ذات رتبه $n \times n$ وعلى الحقل F وكان $MN = I$ فإن $NM = I$ (هذا يعني انه في حالة اختبار كون المصفوفة N نظيرة للمصفوفة M نكون بحاجة فقط لاختبار احد الشرطين $MN = I$، $NM = I$).

البرهان :

ليكن $T, S: F^n \rightarrow F^n$ تحويلين خطيين ناتجين عن المصفوفتين N, M على التوالي وبالنسبة لزوج القواعد الطبيعية E,E بحيث

$$E = \{A_1 = (1,0,\ldots,0),\ A_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ A_n = (0,\ldots,0,1)\}$$

اي ان : $M_S = M$ ، $M_T = N$ بما ان $MN = I$ ، عليه يكون $ToS = 1_{F^n}$

(I = التحويل المحايد) من هذه العلاقة يمكننا ان نبرهن على ان التحويل S يكون تشاكلاً وعلى النحو التالي : لنفرض ان $B \in Ker\ S$ ، اي ان $S(B) = O$ عليه ينتج : $O = T(O) = T(S(B)) = ToS(B) = I(B) = B$ هذا يعني ان $Ker\ S = \{O\}$ وبالتالي يكون لدينا :

$$n = \dim F^n = \dim(ImS) + \dim(Ker\ S) = \dim(ImS)$$

اي ان $ImS = F^n$. الان نتيجة (2.3.4) تنتج ان S يكون تشاكلاً . عليه يوجد تحويل خطي $P: F^n \rightarrow F^n$ يحقق $SoP = 1_{F^n}$. هذا يعني ان P نظير ايمن الى S وبما ان T نظير ايمن الى S ، فيجب ان يكون $P = T$ وذلك حسب المبرهنة (2.3.1) . اذن حصلنا على :

$ToS = 1_{F^n}$ و $SoT = 1_{F^n}$ بالرجوع للمصفوفات نحصل على :

$$I = M_{1_{F^n}} = M_{SoT} = M_T \cdot M_S = NM$$

(و . هـ . م)

حيث ان البرهان اعلاه يبدو صعباً او معقداً بعض الشيء فإننا ندعو القارىء الى ان يجرب برهنة النتيجة اعلاه بالحسابات المباشرة (حتى الحالة 3×3 تكون طويلة جداً) .

لغرض دراسة التحويلات الخطية سوف نلجأ دائماً الى تمثيل التحويل الخطي بمصفوفة وذلك لبرهنة بعض النتائج او عمل بعض الحسابات . ان التمثيل المصفوفي للتحويل الخطي $T: V \rightarrow W$ يعتمد اعتماداً كلياً على اختيار القواعد الى كل من V و W . فلو كان اختيارنا للقواعد عشوائياً لربما حصلنا على مصفوفة معقدة لاتعكس خصائص T بسهولة فعلية نغير القواعد في كل من V و W للحصول على مصفوفة ابسط ان امكن وذلك لان تغير القواعد لايؤثر على التحويل الخطي وانما يؤثر على متجه الاحداثيات لمتجهات V و W . عليه فإن الاسئلة التالية تطرح نفسها .

1 ـــ هل يمكن ايجاد قاعدة الى V وقاعدة الى W بحيث تكون مصفوفة T بالنسبة لذلك الزوج من القواعد بأبسط صيغة .

2 ـــ ماعلاقة مصفوفتين تمثلان التحويل الخطي نفسه لكن بالنسبة لزوجين مختلفين من القواعد .

3 ـــ لو اعطينا مصفوفتين M و N لهما نفس الدرجة فمتى وتحت اي شرط يمكننا ان نقول بأن هاتين المصفوفتين تمثلان تحويلاً خطياً واحداً بالنسبة لقواعد مختلفة .

الاجابة على الاسئلة اعلاه تمثل مادة البند التالي .

تمارين (2.4)

1 ـــ جد مصفوفة كل من التحويلات التالية وذلك بالنسبة للقواعد الطبيعية .

(أ) $T:R^2 \rightarrow R^2$ ، $T(x,y) = (x-2y,o)$.

(ب) $T:P_1(R) \rightarrow R^3$ ، $T(a+bx) = (a-b, 2b-a, 3b)$.

(ج) $T: M_2(R) \rightarrow R^2$ ،

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b, c+d)$$

(د) $T:R \rightarrow R^3$ ، $T(x) = (x, 2x, o)$.

(هـ) $T; C^2 \rightarrow C^3$ ، $T(z_1, z_2) = (2z_1, z_1 - z_2, z_1 + z_2)$.

2 ـــ في كل مما يلي ، جد التحويل الخطي T الذي مصفوفته بالنسبة للقواعد المعطاة تكون :

(أ) $T:R^2 \rightarrow R^3$ ، $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ بالنسبة للقاعدة $G = \{A_1 = (1,2), A_2 = (-3,1)\}$ الى R^2 والقاعدة $H = \{B_1 = (1,2,0)$ $, B_2 = (0, 1, 1), B_3 = (0, 0, 1)\}$.

(ب) $T: M_2(R) \rightarrow R^2$ ، $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ بالنسبة للقاعدة

$$G = \{A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \}$$

والقاعدة $H = \{B_1 = (1, -1), B_2 = (0,3)\}$.

(ج) $T: R^3 \rightarrow P_2(R)$ ، $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ بالنسبة للقاعدة الطبيعية الى R^3 والقاعدة $H = \{A_1 = 2, A_2 = 1 + x, A_3 = -x^2\}$ الى $P_2(R)$.

(هـ) $T; C^2 \rightarrow C^3$ ، $M = \begin{bmatrix} i & -i & 1+i \\ -2 & 1 & -1+2i \end{bmatrix}$ بالنسبة للقاعدة $G = \{(1,2), (i,0)\}$ الى C^2 والقاعدة الطبيعية الى C^3 . (C^2 ، C^3 فضاءات على الحقل C) .

3 ـــ اذا كانت $A = \begin{bmatrix} o & o & o \\ a & o & o \\ b & o & c \end{bmatrix}$ ، حيث $a, b, c \in R$

فبرهن على ان $A^3 = O$ بدون استخدام ضرب المصفوفات .

(ارشاد : جد التحويل الخطي $T:R^3 \rightarrow R^3$ الذي مصفوفته بالنسبة للقواعد الطبيعية تكون A) .

4 ـــ اعتبر $A_1 = (1,3)$ ، $A_2 = (-1,4)$ واعتبر ان $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة التحويل $T: R^2 \rightarrow R^2$ بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1 , A_2\}$.

(أ) جد متجه احداثيات كل من $T(A_1)$ ، $T(A_2)$ بالنسبة للقاعدة S .

(ب) جد $T(A_1)$ و $T(A_2)$.

(ج) جد $T(7,4)$.

5 ـــ اعتبر $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة التحويل $T: P_2(R) \rightarrow P_2(R)$ بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1 , A_2 , A_3\}$ حيث $A_1 = 3x + 3x^2$ ، $A_2 = -1 + 3x + 2x^2$ ، $A_3 = 3 + 7x + 2x^2$.

(أ) جد متجه احداثيات كل من $T(A_1)$ ، $T(A_2)$ ، $T(A_3)$ بالنسبة للقاعدة S .

(ب) جد $T(A_1)$ ، $T(A_2)$ ، $T(A_3)$.

(ج) جد $T(1 + x)$.

6 ــ اذا كانت $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ قاعدة لفضاء متجهات V على حقل F ، فجد المصفوفة بالنسبة الى S للتحويل الخطي $T:V \to V$ المعرف بواسطة :

$T(A_1) = A_2, T(A_2) = A_3, T(A_3) = A_4, T(A_4) = A_1$.

7 ــ اذا كان $D: P_2(R) \to P_2(R)$ التحويل الخطي المعرف بواسطة $D(P) = P'$ (مشتقة P) . في الجزأين (أ) ، (ب) اوجد مصفوفة D بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1, A_2, A_3\}$.

(أ) $A_1 = 1, A_2 = x, A_3 = x^2$.

(ب) $A_1 = 2, A_2 = 2-3x, A_3 = 2-3x + 8x^2$.

(ج) استخدم مصفوفة الجزء (أ) لحساب $D(6- 6x + 24 x^2)$.

(د) كرر المطلوب في الجزء (ج) بأستخدام مصفوفة الجزء (ب) .

8 ــ في كل جزء ، $S = \{f_1, f_2, f_3\}$ هي قاعدة فضاء جزئي V من فضاء المتجهات الذي يحتوي على الدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقي . اوجد المصفوفة بالنسبة الى S للتحويل الخطي $D: V \to V$ (تحويل المشتقة) .

(أ) $f_1 = 1, f_2 = \text{Sin}x, f_3 = \text{Cos}x$.

(ب) $f_1 = 2, f_2 = e^x, f_3 = e^{2x}$.

(ج) $f_1 = e^{2x}, f_2 = xe^{2x}, f_3 = x^2e^{2x}$.

9 ــ لتكن $N = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ وليكن $T: M_2(R) \to M_2(R)$ التحويل الخطي المعرف بالصيغة : $T(A) = AN - NA$.

(أ) جد $T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ بصورة مباشرة .

(ب) جد مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية .

(ج) جد مصفوفة T بالنسبة للقاعدة :

$$S = \left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

(د) جد متجه احداثيات $A = (1\ 1)\ (2\ 4)$ ثم جد $T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ بأستخدام المصفوفة في الجزء (ج) وتحقق من الناتج من الجزء (ا) .

10 ــ ليكن $T: M_3(R) \rightarrow M_3(R)$ التحويل الخطي المعرف بالصيغة :

$$T(A) = (A - A^T)/2$$

حيث A^T تساوي مدورة المصفوفة A (transpose of A) جد مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية .

(2.5)تغيير القواعد والصيغ الاعتيادية

Change of Bases & Normal forms

لقد طرحنا في نهاية البند السابق ثلاثة اسئلة . الاجابة على السؤال الاول ستكون في المبرهنة (2.5.1) ادناه . السؤالين الثاني والثالث تكون الاجابة عليهما في المبرهنة (2.5.2) .

مبرهنة (2.5.1) :

اذا كان كل من V و W فضاء متجهات منتهي البعد بحيث ان $\dim V = m$ ، $\dim w = n$. واذا كان $T: V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً ذا رتبه تساوي r فإنه بالامكان دائماً ايجاد قاعدة الى V وقاعدة الى W بحيث ان مصفوفة T بالنسبة لذلك الزوج من القواعد تكون بالصيغة :

$$M_T = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

حيث ان I_r تمثل المصفوفة المحايدة $r \times r$. هذه الصيغة تسمى الصيغة الاعتيادية .

البرهان :

بما ان رتبة T تساوي r ، عليه تكون صفرية T بعدية الى m-r . نختار قاعدة الى KerT مثل $\{B_1, \ldots, B_{m-r}\}$ ثم نوسعها الى قاعدة $\{A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_{m-r}\}$ الى V . الآن مجموعة المتجهات $\{C_1 = T(A_1), \ldots, C_r = T(A_r)\}$ تكون مستقلة خطياً ولغرض برهنة ذلك نأخذ تركيباً خطياً من تلك المتجهات ونساويه بالصفر .

$$y_1C_1 + \ldots + y_rC_r = O$$
$$y_1T(A_1) + \ldots + y_rT(Ar) = O$$

بما ان T تحويلاً خطياً فينتج

$$T(y_1 A_1 + \ldots + y_rA_r) = O$$

عليه نستنتج على ان : $y_1A_1 + \ldots + y_rA_r \in KerT$

هذا يعني انه توجد اعداد قياسية $x_1, \ldots, x_{m-r}$ تحقق :

$$y_1A_1 + \ldots + y_rA_r = x_1B_1 + \ldots + x_{m-r} B_{m-r}$$

وهذا يعني ان :

$$y_1A_1 + \ldots + y_rA_r - x_1B_1 - \ldots - x_{m-r}B_{m-r} = O \, .$$

وبما ان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_{m-r}\}$ مستقلة خطياً فينتج ان :

$$y_1 = o, \ldots, y_r = 0, x_1 = 0, \ldots, x_{m-r} = 0$$

وبالتالي تكون المجموعة $\{C_1, \ldots, Cr\}$ مستقلة خطياً نوسع هذه المجموعة الى قاعدة $\{C_1, \ldots, C_r, D_1, \ldots D_{n-r}\}$ الى W . بذلك يكون لدينا :

$$T(A_1) = C_1 = 1. C_1 + o.C_2 + \ldots + o.C_r + oD_1 + \ldots + oD_{n-r}$$
$$\vdots$$
$$T(Ar) = Cr = o.C_1 + \ldots + o.C_{r-1} + 1C_r + o.D_1 + \ldots + oD_{n-r}$$

$$T(B_1) = O = 0.C_1 + \dots + 0.C_r + 0.D_1 + \dots + 0D_{n-r}$$

$$T(B_{m-r}) = O = 0.C_1 + \dots + 0.C_r + 0.D_1 + \dots + 0.D_{n-r}$$

عليه تكون مصفوفة T بالنسبة للقاعدة $\{A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_{m-r}\}$ الى V والقاعدة $\{C_1, \dots, C_r, D_1, \dots, D_{n-r}\}$ الى W بالصيغة :

$$M_T = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\longleftarrow r \longrightarrow}{\begin{matrix} 100\dots0 \\ 010\dots0 \\ 0\dots01 \end{matrix}} & \overset{\longleftarrow n-r \longrightarrow}{\begin{matrix} 0\dots\dots0 \\ \vdots \quad \vdots \\ 0\dots\dots0 \end{matrix}} \\ \hline \begin{matrix} 0\dots0 \\ \vdots \quad \vdots \\ 0\dots0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0\dots\dots0 \\ \vdots \quad \vdots \\ 0\dots\dots0 \end{matrix} \end{array}\right) \begin{matrix} \updownarrow r \\ \\ \updownarrow m-r \end{matrix}$$

وهذه المصفوفة يمكن ان تكتب بالصيغة القالبية على الشكل

$$M_T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

(و . هـ . م)

نوضح فكرة البرهان اعلاه بالمثال التالي :

مثال (1) :

جد قاعدة الى R^4 وقاعدة الى R^3 لكي تكون مصفوفة التحويل الخطي $T:R^4 \rightarrow R^3$ بالصيغة الاعتيادية ، حيث ان

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_3, 2x_3)$$

الحل : نحاول اولاً ايجاد قاعدة الى KerT . لهذا الغرض نضع $T(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ ونحصل على المعادلات

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_3 = 0$$

والتي بدورها تؤدي الى : $x_1 = -x_2 , x_3 = 0$. بذلك يكون

$$KerT = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1 = -x_2, x_2 = x_2, x_3 = 0, x_4 = x_4)\}$$

بذلك تكون المجموعة $\{B_1 = (-1, 1, 0, 0), B_2 = (0,0,0,1)\}$ قاعدة الى KerT
يمكننا الان اضافة المتجهين $A_1 = (1,0,0,0), A_2 = (0,0,1,0)$ لكي تكون المجموعة $\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ قاعدة الى R^4 .
الان نضع

$$C_1 = T(A_1) = T(1, 0,0,0) = (1,1,0)$$
$$C_2 = T(A_2) = T(0,0,1,0) = (0,-1,2)$$

يمكننا الان اضافة المتجه $D_1 = (1,0,0)$ لكي تصبح المجموعة $\{C_1, C_2, D_1\}$ قاعدة الى R^3 . الان تكون مصفوفة T بالنسبة للقواعد اعلاه بالصيغة

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وهذه هي الصيغة الاعتيادية المطلوبة .

ملاحظة :

ان اضافة المتجهين A_1, A_2 عملية اختيارية فلو اخترنا متجهين آخرين مثل A'_1 , A'_2 بحيث ان المجموعة $\{A'_1, A'_2, B_1, B_2\}$ تكون قاعدة الى R^4 لما تغيرت المصفوفة وعليه توجد قواعد كثيرة الى R^4 و R^3 التي تجعل مصفوفة T بالنسبة لها بالصيغة الاعتيادية .

نجيب الان على السؤالين المطروحين في نهاية البند السابق حول مسألة تغير القواعد وستكون الاجابة في المبرهنة التالية :

مبرهنة (2.5.2) :

افرض ان كل من M و $M^\star$ مصفوفة ذات درجة $m \times n$ ، وان V فضاء متجهات ذا بعد m و W فضاء متجهات ذا بعد n . عندئذ تمثل المصفوفتان M و $M^\star$ التحويل الخطي نفسه $T:V \rightarrow W$ بالنسبة الى (ربما) زوجين مختلفين من القواعد اذا وفقط اذا وجدت مصفوفتين قابلتين للقلب P و Q بحيث ان :

$$M^\star = PMQ^{-1}$$

(لاحظ ان P مصفوفة $m \times m$ و Q مصفوفة $n \times n$) .

على وجه الخصوص تكون $P = Q$ في حالة كون $V = W$.

البرهان :

لنفرض اولاً ان المصفوفتين M و $M^\star$ تمثلان التحويل الخطي نفسه $T:V \rightarrow W$. بالنسبة الى (ربما) زوجين مختلفين من القواعد . بذلك تكون لدينا قاعدة $G = \{A_1, \ldots, A_m\}$ الى V وقاعدة $H = \{B_1, \ldots, B_n\}$ الى W بحيث ان مصفوفة T بالنسبة لتلك القواعد تكون M ، وكذلك يكون لدينا قاعدة $G^\star = \{A_1^\star, \ldots, A_m^\star\}$ الى V وقاعدة $H^\star = \{B_1^\star, \ldots, B_n^\star\}$ الى W بحيث ان مصفوفة T بالنسبة لتلك القواعد تكون $M^\star$.

المطلوب ايجاد مصفوفتين قابلتين للقلب P و Q بحيث ان

$$M^\star = PMQ^{-1}$$

لتكن P مصفوفة الانتقال من القاعدة $G^\star$ الى القاعدة G و Q مصفوفة الانتقال من القاعدة $H^\star$ الى القاعدة H . ليكن A اي متجه في V وليكن X متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة G و $X^\star$ متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة $G^\star$. الان المبرهنة (1.9.1) والنتيجة (1.9.3) تنصان على ان :

$$X^\star = XP^{-1}$$

المبرهنة (2.4.2) تنص على ان متجه احداثيات $T(A)$ بالنسبة للقاعدة H يكون XM، ومتجه احداثياته بالنسبة للقاعدة $H^\star$ سوف يكون مساوياً الى $X^\star M^\star$. بما ان Q هي مصفوفة الانتقال من القاعدة $H^\star$ الى القاعدة H. اذن المبرهنة (1.9.1) والنتيجة (1.9.3) تنصان على ان :

$$XM = X^\star M^\star Q$$

بالتعويض عن $X^\star$ نحصل على العلاقة :

$$XM = X P^{-1} M^\star Q$$

العلاقة اعلاه صحيحة لجميع المتجهات X. هذا يعني تساوي المصفوفتين :

$$M = P^{-1} M^\star Q$$

أو

$$M^\star = PMQ^{-1}$$

بما ان كل من P, Q مصفوفة انتقال فعليه تكون كل منها قابلة للقلب. على العكس لو فرضنا ان $M^\star = PMQ^{-1}$، حيث ان كل من P,Q مصفوفة قابلة للقلب. علينا ان ننشيء تحويلاً خطياً $T:V \to W$ وزوجين من القواعد الى V و W بحيث ان M تمثل T بالنسبة لزوج و $M^\star$ تمثل T بالنسبة للزوج الآخر. لهذا الغرض نختار اولاً اي قاعدة $G = \{A_1, \dots, A_m\}$ الى V وأي قاعدة $H = \{B_1, \dots, B_n\}$ الى W. ليكن الان $T:V \to W$ ذلك التحويل الخطي الذي مصفوفته بالنسبة لزوج القواعد اعلاه تكون M.

(راجع مثال 3 من البند 2.4). الان نستخدم المصفوفتين Q, P للحصول على قواعد جديدة

$$H^\star = \{B_1^\star, \dots, B_n^\star\} ، G^\star = \{A_1^\star, \dots, A_m^\star\}$$

بحيث تكون P مصفوفة الانتقال من القاعدة $G^\star$ الى القاعدة G ($G^\star$ تكتب بدلالة G) و Q مصفوفة الانتقال من القاعدة $H^\star$ الى القاعدة H ($H^\star$ تكتب بدلالة H).

المطلوب الان ان نبرهن على ان المصفوفة $M^\star$ التي تساوي المصفوفة PMQ^{-1} بالفرض، هي مصفوفة التحويل الخطي T الذي انشأناه لكن بالنسبة لزوج القواعد الجديد $G^\star$ الى V و $H^\star$ الى W. لنفرض اولاً ان مصفوفة T بالنسبة لزوج

القواعد $G^\star$ ، $H^\star$ تكون N . حسابات مماثلة للتي اجريناها في الجزء الاول من البرهان تظهر ان : $N = PMQ^{-1}$.

بما ان $M^\star = PMQ^{-1}$ بالفرض . اذن $M^\star = N$ وعليه تكون $M^\star$ مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة لزوج القواعد $G^\star$ ، $H^\star$.

(و . هـ . م .)

مثال (2) :

اذا كان $T:R^3 \to R^2$ تحويلاً خطياً معرفاً بالصيغة .

$$T(x, y, z) = (x - y, y + 3z)$$

فجد كل مما يلي :

(أ) المصفوفة M التي تمثل T بالنسبة للقواعد الطبيعية .

(ب) المصفوفة $M^\star$ التي تمثل T بالنسبة للقاعدة $\{(1,1,0), (1,-1,0), (0,0,1)\}$ الى R^3 والقاعدة $\{(1,2), (2,1)\}$ الى R^2 .

(ج) مصفوفتان قابلتان للقلب P,Q بحيث ان $M^\star = PMQ^{-1}$.

الحل :

(أ) القاعدة الطبيعية الى R^3 تتكون من المتجهات :

$$A_1 = (1,0,0),\ A_2 = (0,1,0),\ A_3 = (0,0,1)$$

والقاعدة الطبيعية الى R^2 تتكون من المتجهات :

$$B_1 = (1,0),\ B_2 = (0,1)$$

لايجاد المصفوفة M نلاحظ :

$$T(A_1) = T(1,0,0) = (1,0) = (1)\,B_1 + (0)\,B_2$$
$$T(A_2) = T(0,1,0) = (-1,1) = (-1)B_1 + (1)B_2$$
$$T(A_3) = T(0,0,1) = (0,3) = (0)\,B_1 + (3)B_2$$

عليه تكون المصفوفة M كما يلي :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(ب) ضع

$A_1^\star = (1,1,0),\ A_2^\star = (1,-1,0),\ A_3^\star = (0,0,1)$
$B_1^\star = (1,2),\ B_2^\star = (2,1)$

عليه يكون لدينا :

$T(A_1^\star) = T(1,1,0) = (0,1) = (2/3)\,B_1^\star + (-1/3)\,B_2^\star$
$T(A_2^\star) = T(1,-1,0) = (2,-1) = (-4/3)\,B_1^\star + (5/3)\,B_2^\star$
$T(A_3^\star) = T(0,0,1) = (0,3) = (2)B_1^\star + (-1)B_2^\star$

اذن تكون مصفوفة T بالنسبة لزوج القواعد $\{A_1^\star, A_2^\star, A_3^\star\}$ ، $\{B_1^\star, B_2^\star\}$ كما يلي :

$$M^\star = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -4/3 & 5/3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(ج) لغرض ايجاد المصفوفتين P ، Q اللتين تحققان $M^\star = PMQ^{-1}$ نراجع برهان المبرهنة (2.5.2) فنرى على ان :

P مصفوفة الانتقال من القاعدة الجديدة $\{A_1^\star, A_2^\star, A_3^\star\}$ الى القاعدة القديمة (القاعدة الطبيعية) .

Q تكون مصفوفة الانتقال من القاعدة الجديدة $\{B_1^\star, B_2^\star\}$ الى القاعدة القديمة (القاعدة الطبيعية) .

وعليه يكون لدينا :

$$A_1^\star = (1,1,0) = (1)\,A_1 + (1)\,A_2 + (0)\,A_3$$
$$A_2^\star = (1,-1,0) = (1)\,A_1 + (-1)\,A_2 + (0)\,A_3$$
$$A_3^\star = (0,0,1) = (0)\,A_1 + (0)\,A_2 + (1)\,A_3$$

اذن

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولايجاد Q نكتب القاعدة $\{B_1^\star, B_2^\star\}$ بدلالة القاعدة الطبيعية

$$B_1^\star = (1,2) = (1)\,B_1 + (2)\,B_2$$
$$B_2^\star = (2,1) = (2)\,B_1 + (1)\,B_2$$

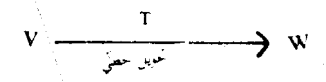
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

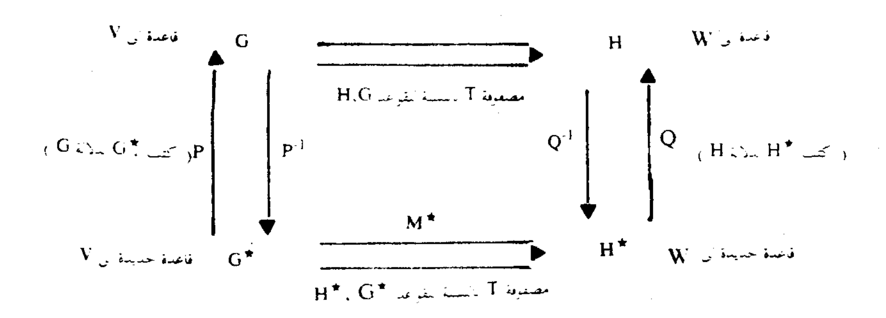
واذن

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

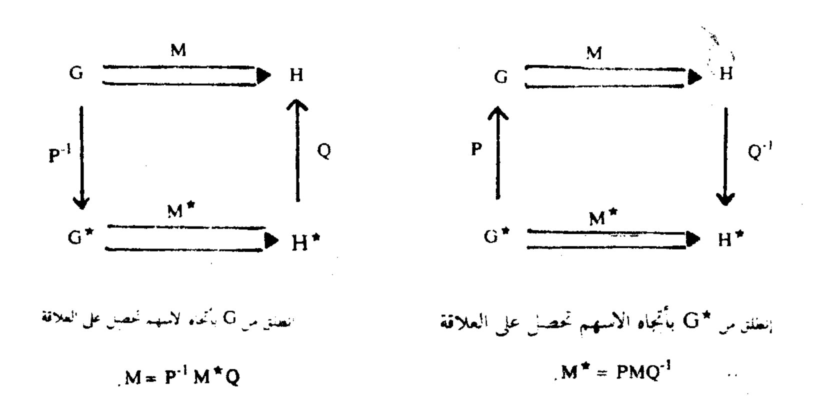
الان حسابات بسيطة تظهر ان $M^\star = PMQ^{-1}$.

المخطط التالي يذكر الطالب بالنتائج التي حصلنا عليها .





المخطط اعلاه يؤدي الى المخططين المتكافئين :



إنطلق من G^* بأتجاه الأسهم تحصل على العلاقة

$M^* = PMQ^{-1}$.

انطلق من G باتجاه الاسهم تحصل على العلاقة

$M = P^{-1}M^*Q$.

1 ــ تذكر دائماً انه اذا كانت لديك مصفوفة انتقال من قاعدة رقم (1) الى قاعدة رقم (2). فإن مقلوب تلك المصفوفة تكون مصفوفة الأنتقال من قاعدة رقم (2) الى قاعدة رقم (1).

2 ــ لايمكنك بصورة عامة عكس اسهم M^*, M وذلك لانها بصورة عامة مصفوفات غير قابلة للقلب.

تمارين (2.5)

1 ــ جد قواعد تجعل مصفوفة كل من التحويلات الخطية التالية مصفوفة بالصيغة الاعتيادية .

(أ) $T:R^3 \rightarrow R^2$ ، $T(x,y,z) = (x+2y, -z+5x)$.

(ب) $T:R^2 \rightarrow M_2(R)$ ، $T(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & -x \\ -y & x-y \end{pmatrix}$.

(ج) $T: C^2 \rightarrow C^3$ ، $T(z_1, z_2) = (z_1 - z_2, 2z_1 - 2z_2, 0)$.

(د) $T: P_2(R) \rightarrow P_3(R)$ ، $T(a+bx+cx^2) = (a+b)\,x^3$.

2 ــ اذا كان $T:R^2 \rightarrow R^4$ تحويلاً خطياً معرفاً بالصيغة :

$$T(x,y) = (x+y,\ 2x-y,\ 3x+4y,\ 0)$$

(أ) جد المصفوفة M التي تمثل T بالنسبة للقواعد الطبيعية .

(ب) جد قاعدة الى R^2 وقاعدة الى R^4 بالنسبة لهما تكون مصفوفة T ولتكن $M^\star$ بالصيغة العمودية .

(ج) جد مصفوفتين P,Q قابلتين للقلب تحققان $M^\star = PMQ^{-1}$.

3 ــ جد مصفوفات قابلة للقلب P,Q بحيث تكون PMQ^{-1} بالصيغة $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ ، حيث I_r المصفوفة المحايدة .

(أ) $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 8 \\ 4 & -3 & -7 \\ 1 & 12 & -3 \end{bmatrix}$ ، (ب) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 11 & 2 \end{pmatrix}$

4 ــ اذا كان $T: P_2(R) \rightarrow P_4(R)$ التحويل الخطي المعرف بالصيغة :

$T(a + bx + cx^2) = ax^2 + bx^3 + cx^4$.

(أ) جد المصفوفة M التي تمثل T بالنسبة للقواعد الطبيعية .

(ب) جد قواعد تجعل من مصفوفة T بالنسبة لها بالصيغة الاعتيادية .

(ج) جد مصفوفتين P,Q قابلتين للقلب تحققان PMQ^{-1} تكون بالصيغة الاعتيادية .

الفصل الثالث

انظمة المعادلات الخطية

Systems of Linear Equations

(3.0) مقدمة

ان انظمة المعادلات الخطية اداة معبرة في كثير من المواضيع كالفيزياء والهندسة الكهربائية والعلوم الاقتصادية بالاضافة الى اهميتها الكبيرة في الرياضيات .

يمكن كتابة نظام للمعادلات الخطية بالصيغة :ــ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (\star)$$

حيث ان $x_1, \dots, x_n$ تمثل المجاهيل التي يتوجب ايجادها . الاعداد a_{ij}, $i: 1..m$, $j: 1, \dots, n$ من الممكن ان تكون اعداداً في اي حقل لكننا سنعتبرها اعداداً حقيقية وذلك للسهولة لكن القاري المهتم يستطيع ان يضع جميع النتائج التي سنحصل عليها باللغة العامة عندما تكون a_{ij} عناصراً في اي حقل كان . هذه الاعداد تسمى معاملات النظام $(\star)$. كذلك فان $b_1, \dots, b_m$ تكون اعداداً حقيقية .

ان اي حل للنظام (*) اعلاه عبارة عن قوس مرتب $(S_1, \dots, S_n)$ من الاعداد تحقق جميع المعادلات في النظام ، اي ان :

$$a_{11}S_1 + \dots + a_{1n}S_n = b_1$$
$$a_{21}S_1 + \dots + a_{2n}S_n = b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}S_1 + \dots + a_{mn}S_n = b_m$$

ان عبارة حل نظام المعادلات (*) تعني ايجاد جميع الحلول الممكنة . المثال التالي يذكرنا بما كنا نمارسه في المدارس الثانوية والمراحل الاولية من الجامعة .

مثال (1) :

حل النظام الخطي :

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -3$$

الحل : من معلوماتنا السابقة يتضح ان احدى طرق الحل تكون كما يلي :
اولاً نرقم المعادلات

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2 \qquad (1)$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \qquad (2)$$
$$x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -3 \qquad (3)$$

نضرب المعادلة الاولى في (-3) ونضيفها الى المعادلة الثانية لنحصل على المعادلة $(2')$ ثم نطرح المعادلة الاولى من المعادلة الثالثة لنحصل على المعادلة $(3')$.

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2 \qquad (1)$$

$$4x_2 - 4x_3 = -5 \qquad (2)'$$

$$4x_2 - 4x_3 = -5 \qquad (3)'$$

بحذف المعادلة $(3)'$ التي تساوي المعادلة $(2)'$ نحصل على :

$$x_1 - x_2 + x_3 = = 2$$
$$x_2 - x_3 = -5/4$$

وهذا يكافيء :

$$x_1 = x_2 - x_3 + 2$$
$$x_2 = x_3 - 5/4$$

او

$$x_1 = 3/4$$
$$x_2 = x_3 - 5/4$$

عندئذ تكون الحلول بالصيغة : $(3/4, x_3 - 5/4, x_3)$، حيث ان x_3 تتغير عشوائياً.
فمثلاً : $(3/4,-1/4,1),(3/4,0,5/4)$ تعتبر حلولاً لكن $(1,2,3)$ و $(3/4,2,1)$ ليست حلولاً.
ليست جميع الانظمة الخطية قابلة للحل فمثلاً النظام :

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$$

غير قابل للحل وذلك لأنه بعد ضرب المعادلة الاولى في 2 نحصل على الطرف الايسر من المعادلة الثانية وهذا يؤدي الى ان $2 = 5$ وهذا غير ممكن. لذلك يجب علينا معرفة الشروط التي تجعل النظام الخطي قابلاً للحل وبعدها نطور طرقاً لايجاد الحلول وهذا ماسندرسه في البندين (3,1) و (3.2).

(3.1) الصيغة المصفوفية للانظمة الخطية

Matrix Form For Linear Equations

لنكتب المصفوفات التالية :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

المصفوفة A تسمى مصفوفة المعاملات للنظام الخطي (★) والمصفوفة B تسمى مصفوفة الثوابت. عندئذ يمكننا كتابة النظام الخطي (★) بصيغة بسيطة كمعادلة مصفوفية :

$$AX = B \quad \cdots\cdots \quad (\#)$$

هذه الصيغة تعرف بالصيغة المصفوفية للنظام الخطي (★).

الآن نوضح كيف ان المعادلة (#) تعطينا تحويلاً خطياً $T: R^n \to R^m$ وبدراسة ذلك التحويل الخطي نستطيع معرفة معلومات عن قابلية حل النظام الخطي (★).

لناخذ مدورة طرفي المعادلة (#) فنحصل على

$$X^T A^T = B^T$$

وبالتفصيل نحصل على المعادلة :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ & & \vdots & \\ a_{in} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (b_1, \ldots, b_m) \quad (\#)^T$$

بأعتبار المصفوفة A^T ذات الدرجة $n \times m$ مصفوفة تحويل خطي $T: R^n \to R^m$ بالنسبة للقواعد الطبيعية نحصل على المبرهنة التالية.

مبرهنة (3.1.1) :

النظام الخطي(*)يكون قابلاً للحل اذا وفقط اذا كان المتجه $(b_1, \ldots, b_m)$ منتمياً الى صورة التحويل الخطي $T: R^n \rightarrow R^m$ الناتج من المصفوفة A^T بالنسبة للقواعد الطبيعية . اي اذا وفقط اذا $(b_1, \ldots, b_m) \in ImT$.

البرهان :

نلاحظ اولاً انه باستعمال القاعدة الطبيعية الى R^k فان كل متجه يساوي متجه احداثياته وذلك لكل k .

بمراجعة المبرهنة (2.4.2) نحصل على مايلي :

اذا كان $Z = (x_1, \ldots, x_n)$ متجهاً في R^n فان متجه احداثياته بالنسبة للقاعدة الطبيعية يكون مساوياً له وبالتالي يكون متجه احداثيات $T(Z)$ مساوياً الى ZA^T (**تذكر ان A^T مصفوفة T بالنسبة للقواعد الطبيعية**) . **لكن متجه احداثيات** $T(Z)$ بالنسبة للقاعدة الطبيعية يكون مساوياً له . .اي ان

$$T(Z) = ZA^T$$

لكن النظام الخطي (*) هو نفسه المعادلة # واي حل للمعادلة # يكون حلاً للمعادلة $(\#)^T$ وبالعكس . هذا يعني ان النظام (*) يكون قابلاً للحل اذا وفقط اذا وجد متجه $Z = (x_1, \ldots, x_n)$ في R^n يحقق $ZA^T = (b_1, \ldots, b_m)$ ، اي ان $T(Z) = (b_1, \ldots, b_m)$.

هذا يعني ان النظام (*) يكون قابلاً للحل اذا وفقط اذا $(b_1, \ldots, b_m) \in ImT$

(و . هـ . م)

المبرهنة اعلاه تبدو جيدة لكن من الناحية النظرية حيث انه كيف يمكننا معرفة ما اذا كان المتجه $(b_1, \ldots, b_m)$ منتمياً الى ImT ام غير منتم وذلك برؤية مصفوفة المعاملات A . الحقيقة ان الاجابة بسيطة . لنحاول اولاً ادخال بعض الرموز . ضع

$$A_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$$

$$\vdots$$

$$A_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$$

هذه عبارة عن n من المتجهات في R^m وهي تمثل اعمدة المصفوفة A .
اي انها تمثل صفوف المصفوفة A^T وبما ان A^T اعتبرت مصفوفة تحويل خطي $T:R^n \rightarrow R^m$ بالنسبة للقواعد الطبيعية فذلك يحتم الحصول على :

$$T(E_1) = A_1$$

$$T(E_2) = A_2$$

$$\vdots$$

$$T(E_n) = A_n$$

حيث ان $Ej = (o,,o,..,1,0,..,0)$ متجهات القاعدة الطبيعية . الان نلاحظ ان مجموعة المتجهات $\{T(E_1),..,T(E_n)\}$ توّلد ImT وذلك لان $\{E_1,...,E_n\}$ قاعدة الى R^n و T تحويلاً خطياً . عليه فان المجموعة $\{A_1,..,A_n\}$ تولد ImT وحتى يكون المتجه $(b_1,..,b_m)$ منتمياً الى ImT يجب ان يكون تركيباً خطياً من المتجهات $A_1,..,A_n$.

ماتوصلنا اليه ، يمكن التعبير عنه بصورة افضل بعد تقديم التعريف التالي .

تعريف :

اذا كانت $A =$ ([illegible]) مصفوفة ذات درجة mxn فان فضاء الاعمدة (Column Space) للمصفوفة A يكون ذلك الفضاء الجزئي من R^m المولد من قبل اعمدة المصفوفة :

$$A_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$$

$$A_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})$$

$$A_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$$

التي تعتبر n من المتجهات في R^m .

مثال (1) : ماهي المتجهات التي تمثل اعمدة المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

وما هو فضاء الاعمدة للمصفوفة اعلاه .

الحل : المتجهات التي تمثل اعمدة المصفوفة هي المتجهات :

$A_1 = (2, -1,0,4)$

$A_2 = (1, 1, 1, 0)$

في R^4 . ان فضاء الاعمدة للمصفوفة A هو الفضاء الجزئي من R^4 الذي يحتوي على كل التركيبات الخطية للمتجهين اعلاه . اي

$$aA_1 + bA_2 = (2a + b,-a + b,b,4a)$$

وهذا يعني ان فضاء الاعمدة الذي نرمز له بالرمز N يكون :

$$N = \{ (x_1,x_2,x_3,x_4): x_1 = (1/2)x_4 + x_3, x_2 = (-1/4)x_4 + x_3 \}$$

$$N = \{(x_1,x_2,x_3,x_4): 2x_1 - x_4 - 2x_3 = 0 \text{ , } 4x_2 + x_4 - 4x_3 = 0 \}$$

من النقاش اعلاه يمكننا الان تدوين النتائج التي حصلنا عليها بالمبرهنة التالية .

مبرهنة (3.1.1) :

افرض ان

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

نظام معادلات خطية . ضع

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

عندئذ يكون النظام اعلاه قابلاً للحل اذا وفقط اذا كان المتجه $B = (b_1, \ldots, b_m)$ في فضاء الاعمدة للمصفوفة A ، اي ان المتجه B يمكن أن يكتب كتركيب خطي من المتجهات التي تمثل اعمدة المصفوفة A .

مثال (2) :

قرر فيما اذا كان النظام

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$$
$$-x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -3$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2$$

قابلاً للحل .

الحل : ان قابلية النظام اعلاه للحل تعتمد على مدى امكانية كتابة المتجه (1,-3,2) كتركيب خطي من المتجهات التي تمثل اعمدة مصفوفة النظام

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

والتي تكون :

$A_1 = (1,-1,1)\ A_2 = (1,1,3),\ A_3 = (2,-2,2),\ A_4 = (-1,-1,-3)$

لاحظ ان $A_3 = 2A_1$ و $A_4 = -A_2$ وبالتالي يكون فضاء الاعمدة مولداً من قبل المتجهين A_1, A_2 . فاذا كان

$(1,-3,2) = a\,(1,-1,1) + b\,(1,1,3)$

فان

$$a + b = 1$$
$$-a + b = -3$$
$$a + 3b = 2$$

نلاحظ أن مايحقق المعادلتين الاوليتين اعلاه لايحقق الثالثة وهذا يناقض مفهوم الحل الذي ذكرناه . اذن النظام اعلاه غير قابل للحل .

بعد هذا الاستعراض العام نجزيء دراستنا للمعادلات الخطية الى جزئين فنناقش اولاً انظمة المعادلات المتجانسة ثم انظمة المعادلات غير المتجانسة .

(3.2) : انظمة المعادلات الخطية المتجانسة .

Systems of Homogeneous Linear Equations

تعريف

نظام المعادلات الخطية $AX = B$(مكتوب بالصيغة المصفوفية) يسمى نظاماً متجانساً اذا وفقط اذا كان

$$B = \begin{bmatrix} o \\ o \\ \vdots \\ o \end{bmatrix} = O$$

سنناقش في هذا البند حلول النظام المتجانس.

مبرهنة (3.2.1) :

افرض ان $AX = O$ نظام معادلات خطية متجانس حيث ان A مصفوفة ذات درجة $m \times n$ و X مصفوفة المجاهيل ذات الدرجة nx1 . عندئذ تكون مجموعة الحلول $S = \{(S_1, \ldots, S_n)\}$ لهذا النظام عبارة عن فضاء جزئي من R^n واذا كان

$T: R^n \rightarrow R^m$

التحويل الخطي الذي مصفوفته بالنسبة للقواعد الطبيعية تكون A^T فان

$$S = \text{Ker } T$$

البرهان :

اذا كان X_1 و X_2 حلان للنظام $AX = O$ فان

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = O + O = O$$

واذا كان r اي عدد حقيقي فان

$$A(rX_1) = rAX_1 = r.O = O$$

عليه يكون كل من $X_1 + X_2$ و rX_1 حلاً للنظام وبالتالي تكون مجموعة حلول النظام عبارة عن فضاء جزئي من R^n .

اذا لاحظنا ان $AX = O$ اذا وفقط اذا $X^T A^T = O$ فيكون $X^T = (S_1, \ldots, S_n)$ حلاً للنظام $X^T A^T = O$ اذا وفقط اذا كان $T(S_1, \ldots, S_n) = (o, \ldots, o)$ ، اي ان المتجه $(S_1, \ldots, S_n)$ ينتمي الى KerT (راجع المبرهنة (3.1.1)).

(و . هـ . م)

ندرج النتيجة البديهة التالية

نتيجة (3.2.2) :

المتجه الصفري (0,0,..,0) يكون دائماً حلاً لاي نظام متجانس . وهذا الحل يسمى بالحل التافه (Trivial Solution).

بذلك يكون من المهم البحث عن حلول غير تافهة (Non – Trivial Solutions) لانظمة المعادلات الخطية المتجانسة . وسوف نلخص حل هذه المسألة بالمبرهنة التالية .

مبرهنة (3.2.3) :

النظام المتجانس

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0$$

الذي يحتوي على m من المعادلات و n من المجاهيل لديه دائماً الحل التافه $(x_1,\ldots,x_n) = (0,\ldots,0)$ واذا كانت r = بعد فضاء الاعمدة لمصفوفة النظام فان النظام اعلاه يمتلك n-r من الحلول المستقلة خطياً والتي تكون حلولاً غير تافهة .

(تذكر دائماً ان اي حل لاي نظام معادلات خطية عبارة عن متجه في R^n) وعلى وجه الخصوص ، اذا كانت $r = n$ فان للنظام فقط الحل التافه .

البرهان :

الجزء الاول حول الحل التافه فبديهي . بمراجعة المبرهنة (3.1.1) يتضح أن فضاء الأعمدة الذي هو فضاء جزئي من R^m يساوي تماماً صورة التحويل الخطي $T:R^n \rightarrow R^m$ الذي مصفوفته بالنسبة للقواعد الطبيعية تكون A^T حيث ان A

هي مصفوفة النظام. هذا يعني ان $r = \dim(ImT)$ ، اي ان r تساوي رتبة التحويل الخطي T . لكن

رتبة T + صفرية $T = n$

اذن : صفرية $T = n-r$

لكن صفرية $T = \dim(KerT)$ و $KerT$ = فضاء الحلول للنظام المتجانس حسب المبرهنة (3.2.1) .

اذن يكو ن هنالك n-r من الحلول غير التافهة وهو مايساوي بعد فضاء الحلول .
عندما $n = r$ فان $KerT = \{O\}$ وبذلك يكون الحل التافه هو الحل الوحيد .

(و . هـ . م)

نتيجة (3.2.4) :

اذا كان $m < n$ ، اي ان عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل فيجب وجود حلول غير تافهة للنظام

البرهان :

بما ان التحويل الخطي $T:R^n \to R^m$ فان

رتبة $r = T = \dim(ImT) \leq m$

عليه يكون $r \leq m < n$ وبالتالي يكون n-r عدداً موجباً وهذا يعني وجود حلول غير تافهة .

(و . هـ . م)

نتيجة (3.2.5) :

اذا كان $m = n$ ، فان النظام لديه حل غير تافه اذا وفقط اذا كانت مصفوفته A مصفوفة غير قابلة للقلب .

البرهان :

يكون للنظام $AX = O$ حل غير تافه اذا وفقط اذا كان $KerT \neq \{O\}$ وذلك حسب المبرهنة (3.2.3) . الان $T:R^n \to R^n$ (تذكر $m = n$). بذلك يكون $Ker \neq \{O\}$ اذا وفقط اذا لم يكن T تشاكلاً وذلك حسب النتيجة (2.3.4) وهذا يكافيء كون مصفوفة T بالنسبة لاي زوج من القواعد مصفوفة غير قابلة للقلب وذلك حسب النتيجة (2.4.4) . اي ان A^T مصفوفة غير قابلة للقلب وعليه تكون A مصفوفة غير قابلة للقلب .

(و . هـ . م)

ملاحظة

1 ــ نذكر القاريء بان المصفوفة المربعة A تكون غير قابلة للقلب اذا وفقط اذا $|A| = 0$. كذلك فان $|A| = |A^T|$.

2 ــ ان الحالة التي يكون بها عدد المعادلات اكبر من عدد المجاهيل $(m > n)$ تحتم على ان $(m-n)$ من المعادلات ليست جديدة وانما تعتمد خطياً على باقي المعادلات وذلك لانه لايمكننا الحصول على اكثر من m من المتجهات المستقلة خطياً في R^m .

ان جميع النتائج اعلاه عبارة عن وصف لمجموعة حلول النظام المتجانس ، لكن كيف يمكننا « ايجاد » جميع الحلول لنظام متجانس يُعطى لنا ؟ . الطريقة الاساسية تسمى طريقة كاوس للحذف (Gauss elimination) وتتلخص باختزال النظام الى نظام اخر مكافيء له (اي لديه الحلول نفسها) لكن هذا النظام المكافيء يكون بسيطاً ويمكن رؤية الحلول بسهولة .

المفتاح للطريقة اعلاه يكون بملاحظة ان اجراء احدى العمليات التالية على اي نظام معادلات خطية سوف ينتج نظاماً مكافئاً ، بغض النظر ان كان النظام متجانساً ام غير متجانس .

1 ــ استبدال معادلتين .

2 ــ جمع مضاعف معادلة مع معادلة اخرى .

3 ـــ ضرب معادلة بعدد غير صفري .

انه لمن الواضح ان عملية من نوع (1) اعلاه لاتؤثر على مجموعة حلول النظام . ان عملية من نوع (2) لاتؤثر على مجموعة حلول اي نظام خطي مثل :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots. + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (\star)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots. + a_{mn}x_n = b_m$$

فلو افترضنا ان المعادلة i ضربت بالعدد t ثم جمعت مع المعادلة j لتحول النظام اعلاه الى النظام :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$(a_{j1} + ta_{i1})\, x_1 + \ldots + (a_{jn} + ta_{in})x_n = b_j + tb_i \qquad (\#)$$

$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

واضح ان اي حل للنظام(★)يكون حلاً للنظام (#) (اضافة مقادير متساوية لاخرى متساوية تنتج متساوية) . على العكس لو كان $X = (S_1, \ldots, S_n)$ حلاً للنظام (#) لحقق كل معادلة من معادلات(★)ماعدا ربما المعادلة j . تحقيق X للمعادلتين i,j من النظام (#) ينتج :

$$a_{i1}S_1 + \ldots. + a_{in}S_n = b_i$$

$$(a_{j1} + ta_{i1})S_1 + \ldots.. + (a_{jn} + ta_{in})S_n = b_j + tb_i$$

الان لو ضربنا المعادلة الاولى بـ (-t) وجمعنا الناتج مع المعادلة الثانية لحصلنا على

$$a_{j1}S_1 + \dots + a_{jn}S_n = b_j$$

وبذلك يحقق $X = (S_1, \dots, S_n)$ المعادلة j في النظام (*) .

ان برهنة كون عملية من النوع (3) لاتغير حلول النظام تترك للطالب كتمرين .

يمكن تلخيص طريقة كاوس بالخطوات التالية :

الخطوة الاولى : بأعادة ترتيب المعادلات ان اقتضت الضرورة اجعل المعادلة الاولى معادلة محتوية على x_1 .

الخطوة الثانية : اضرب المعادلة الاولى في معكوس معامل x_1 لكي تجعل معامل x_1 مساوياً للواحد في المعادلة الاولى الجديدة .

الخطوة الثالثة : احذف x_1 من بقية المعادلات .

الخطوة الرابعة : ثبت المعادلة الاولى واعد الخطوات الثلاثة اعلاه بالنسبة الى x_2 .

الخطوة الخامسة : استمر هكذا الى ان تتوقف العملية .

يمكن توضيح الطريقة اعلاه بالمثال التالي :

مثال (1) : ناقش حلول النظام المتجانس :

$$2x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$$
$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$$

الحل . نلاحظ هنا ان المعادلة الاولى لاتحتوي على x_1 لذلك نعيد ترتيب المعادلات ومن الافضل اختيار المعادلة التي يكون بها معامل x_1 مساوياً للواحد .

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \; \dots\dots (1)$$
$$2x_2 - x_3 = 0 \; \dots\dots \quad (2)$$

$2x_1 + x_2 + 5x_3 = o \quad .....(3)$

$-x_1 + 4x_2 + x_3 = o \quad ...(4)$

نبدأ الان بتطبيق الخطوة الثالثة وهي حذف x_1 من بقية المعادلات .

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= o \quad \ldots \quad (1)\\
2x_2 - x_3 &= o \quad \ldots \quad (2)\\
5x_2 - x_3 &= o \quad \ldots \quad (3)' = -2(1) + (3)\\
2x_2 + 4x_3 &= o \quad \ldots \quad (4)' = (1) + (4)
\end{aligned}$$

حيث ان $(3)' = -2(1) + (3)$ تعني ان المعادلة الثالثة الجديدة حصلنا عليها بعد ضرب المعادلة الاولى في 2- وجمعها مع المعادلة (3) . بضرب المعادلة الثانية في 1/2 نحصل على النظام .

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= o \ldots (1)\\
x_2 - (1/2)x_3 &= o \ldots (2)\\
5x_2 - x_3 &= o \ldots (3)\\
2x_2 + 4x_3 &= o \ldots (4)
\end{aligned}$$

نبدأ الان بحذف x_2 من المعادلتين (3) و (4) فنحصل على النظام

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= o \quad \ldots \quad (1)\\
x_2 - (1/2) &= o \quad \ldots \quad (2)\\
(3/2)x_3 &= o \quad \ldots \quad -5(2) + (3)\\
5x_3 &= o \quad \ldots \quad -2(2) + (4)
\end{aligned}$$

المعادلتان الاخيرتان تؤديان الى $x_3 = o$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على $x_2 = 0$ وبالتعويض في المعادلة الاولى نحصل على $x_1 = o$. هذا يعني ان النظام يمتلك فقط الحل التافه (الحل الصفري) .

مثال (2) :

اوجد قاعدة لفضاء الحلول للنظام المتجانس

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = o \quad .....(1)$

$2x_1 + 3x_2 - x_4 = o \quad .(2)$

$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \ldots.(3)$

الحل: نلاحظ هنا ان عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل وعليه فان النتيجة (3.2.4) تؤكد وجود حلول غير تافهة للنظام اعلاه.

نحذف x_1 من المعادلتين الثانية والثالثة فنحصل على النظام المكافيء

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \ldots(1)$

$x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \ldots. -2(1) + (2)$

$4x_2 + 4x_3 = 0 \ldots.(1) + (2)$

الان نثبت المعادلتين الاولى والثانية ثم نحذف x_2 من المعادلة الثالثة فنحصل على النظام المكافيء.

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \ldots\ldots(1)$

$x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \ldots..(2)$

$-4x_3 + 12x_4 = 0 \ldots..(3)$

عملية الحذف تتوقف الان. من المعادلة الاخيرة نحصل على $x_3 = 3x_4$

وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على :

$x_2 = -2x_3 + 3x_4 = -2(3x_4) + 3x_4 = -3x_4$

وبالتعويض في المعادلة الاولى نحصل على :

$x_1 = -x_2 + x_3 - x_4 = -(-3x_4) + 4x_4 - x_4 = 5x_4$

نلاحظ هنا ان جميع المتغيرات قد كتبت بدلالة المتغير x_4. عليه يمكن وصف فضاء الحلول كما يلي :

$S = \{(5x_4, -3x_4, 3x_4, x_4) : x_4 \in R\}$

عند التعويض عن x_4 باي قيمة غير صفرية ولتكن مثلاً $x_4 = 1$ نحصل على الحل $X = (5,-3,3,1)$ الذي يكون قاعدة للفضاء S.

تمارين (3.2)

1 ـــ جد فضاء الحلول لكل من الانظمة المتجانسة التالية :

(أ) :

$$x-2y+z=0$$
$$-3x+4y-2z+w=0$$
$$y+3z-4w=0$$

(ب) :

$$x+2y+3z=0$$
$$2x-y-5z=0$$
$$x+7y+14z=0$$
$$x-8y-19z=0$$

(ج) :

$$3x_1+2x_2+x_3-x_4-x_5=0$$
$$x_1-7x_2+x_3+x_4-3x_5=0$$
$$2x_1+3x_2-5x_3+x_4+2x_5=0$$

(د) :

$$x-2y+4z+w=0$$
$$3x+4y-z-2w=0$$
$$x+8y-5z-4w=0$$
$$-3x+y-2w=0$$

2 ـــ جد قيم k التي تجعل النظام التالي يمتلك حلاً غير تافهاً .

$$x-2y+z=0$$
$$2x+y-z=0$$
$$-x+ky-4z=0$$

3 ـــ ناقش حلول النظام :

$$x+y+z=0$$
$$x+y-kz=0$$

$$kx-y-z=0$$
$$x-ky+z=0$$

وذلك لقيم مختلفه الى k .

4 ـــ جد فضاء الحلول للنظام :

$$2x_1-3x_2-x_3+x_4=0$$
$$3x_1+4x_2-4x_3-3x_4=0$$
$$17x_2-5x_3-9x_4=0$$

برهن على وجود حل واحد فقط من الحلول اعلاه يحقق ايضاً نظام المعادلات :

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-1$$
$$x_1-x_2-x_3-x_4=3$$

5 ـــ جد بعد فضاء الحلول لكل من الانظمة التالية :

(أ)

$$x+2y-z=0$$
$$x-y=0$$

(ب)

$$3x-2y+4z=0$$

(ج)

$$x-2y+z+3w=0$$
$$2x+z-w=0$$
$$3x+4z-y+w=0$$

6 ـــ جد مجموعة حلول كل من الانظمة المتجانسة التالية :

(أ)

$$x-y+z=0$$
$$x+y=0$$
$$x+y+z=0$$

(ب)

$$2x+6y-z+w=0$$
$$x-y+z-w=0$$
$$-x-3y+3z+2w=0$$

(ج)

$3x + y - z = o$
$-x + y + z = o$
$2x - y - 3z = o$
$x - 2y - z = o$

(3.3) انظمة المعادلات الخطية غير المتجانسة
Systems of non - homogeneous equations

تعريف :

نظام المعادلات الخطية $AX = B$ (مكتوب بالصيغة المصفوفية) يسمى نظاماً غير متجانساً اذا وفقط اذا كان $B \neq O$.

لقد لاحظنا في البند (3.2) وعلى وجه التحديد في مبرهنة (3.2.1) ان مجموعة حلول اي نظام متجانس مكون من m من المعادلات بـ n من المجاهيل تكون فضاءاً جزئياً من R^n وهذا يعني ان جمع اي حلين يعطي حلاً جديداً وضرب اي حل بعدد يعطي حلاً . السؤال هنا حول طبيعة حلول النظام غير المتجانس . المبرهنة (3.3.1) ادناه تعطي مايشبه مبرهنة (3.2.1) ، حول طبيعة مجموعة حلول النظام غير المتجانس .

مبرهنة (3.3.1) :

اذا كان $X_o = (s_1, \ldots, s_n)$ حلاً ثابتاً للنظام غير المتجانس $AX = B$ فان اي حل آخر يجب ان يكون بالصيغة $X_o + Y$ حيث Y اي حَل للنظام $AX = O$.

البرهان :

بما ان X_o يكون حلاً للنظام $AX = B$ اذن $AX_o = B$. افرض ان Y حل للنظام $AX = O$. اذن $AY = O$. عليه يكون :

$$A(X_o + Y) = AX_o + AY = B + O = B$$

بذلك يكون $X_o + Y$ حلاً للنظام $AX = B$.

هذا يعني ان جمع حلّ للنظام غير المتجانس مع حل للنظام المتجانس التابع له ينتج حلاً جديداً للنظام غير المتجانس.

لنفرض الان ان X_1 يكون حلاً آخر للنظام $AX = B$ سوف نبرهن على ان $X_1 = X_o + Y$ لبعض Y حل للنظام $AX = O$ اولاً لاحظ ان

$$X_1 = X_o + (X_1 - X_o)$$

ضع $Y = X_1 - X_o$ ولاحظ ان

$$AY = A(X_1 - X_o) = AX_1 - AX_o = B - B = O$$

بذلك يكون Y حلاً للنظام $AX = O$ ويحقق $X_1 = X_o + Y$.

(و . هـ . م)

المبرهنة اعلاه تنص على ان ايجاد حلّ واحد فقط للنظام غير المتجانس $AX = B$ وليكن X_o وايجاد جميع حلول النظام المتجانس التابع له $AX = O$ يتيح لنا وصف جميع حلول النظام غير المتجانس بالصورة :

$$S = \{X_o + Y : AY = O, AX_o = B\}$$

X_o يسمى حلاً خاصاً (Particular Solution) . Y يسمى الحل العام للنظام المتجانس (General Solution). عليه فان الحل العام للنظام غير المتجانس يساوي حاصل جمع حل خاص مع حل عام للنظام المتجانس التابع له .

مثال (1) :

جد الحل العام للنظام غير المتجانس :

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 &= 2 \\ x_4 + 3x_5 \quad &= 3 \end{aligned}$$

الحل : لدينا ثلاث معادلات بست متغيرات وهذه المعادلات بابسط صيغة من حيث طريقة كاوس، اي ان x_1 محذوف من المعادلتين الثانية والثالثة و x_2 محذوف من المعادلة الثالثة . بذلك نستطيع ان نجد الحل مباشرة وذلك بكتابة :

$$x_4 = 3-3x_5$$
$$x_2 = 2-x_3-2x_5-x_6$$
$$x_1 = 1-x_3-x_5$$

بوضع $x_3 = x_5 = x_6 = o$ نحصل على حل خاص وهو

$$X_o = (1,2,0,3,0,0)$$

الان نحاول ايجاد الحل العام للنظام المتجانس التابع للنظام المعطى .

$$x_1 + x_3 + x_5 = o$$
$$x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 = o$$
$$x_4 + 3x_5 \qquad = o$$

الحل يكون

$$x_4 = -3x_5$$
$$x_2 = -x_3-2x_5-x_6$$
$$x_1 = -x_3-x_5$$

بذلك يكوّن المتجهات الثلاثة

$$A_1 = (-1,-1,1,0,0,0)$$
$$A_2 = (-1,-2,0,-3,1,0)$$
$$A_3 = (0,-1,0,0,0,1)$$

قاعدة لفضاء الحلول للنظام المتجانس. عليه فان الحل العام للنظام غير المتجانس يكون بالصيغة

$$(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5s_6) = (1,2,0,3,0,0) + aA_1 + bA_2 + cA_3$$

وهذا يعني ان اي حل للنظام يمكن الحصول عليه باختيار قيم مناسبة للاعداد a,b,c .

مثال (2) :

جد الحل العام للنظام غير المتجانس

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1$$
$$2x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -1$$
$$2x_1 + 6x_2 + x_3 + -x_4 = 4$$

الحل: نطبق طريقة كاوس لتبسيط النظام اعلاه. نحذف x_1 من المعادلات الثانية والثالثة والرابعة فنحصل على النظام المكافيء.

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1$$
$$0 = 0$$
$$2x_4 - 2x_5 = -2$$
$$5x_3 + x_4 - 4x_5 = 2$$

والان نستبدل المعادلة الثانية بالرابعة ونضرب المعادلة الثانية الجديدة بـ 1/5 ثم نحذف x_3 من المعادلة الاولى. نتيجة هذا كله تكون :

$$x_1 + 3x_2 - (3/5)x_4 + (2/5)x_5 = 9/5$$
$$x_3 + (1/5)x_4 - (4/5)x_5 = 2/5$$
$$2x_4 - 2x_5 = -2$$
$$0 = 0$$

الان نضرب المعادلة الثالثة بـ 1/2 ثم نستخدم المعادلة الناتجة لحذف x_4 من بقية المعادلات :

$$x_1 + 3x_2 \quad - (1/5)x_5 = 6/5$$
$$x_3 - (3/5)x_5 = 3/5$$
$$x_4 - x_5 = -1$$
$$0 = 0$$

الطريقة تتوقف الان. لغرض الحصول على حل خاص نعوض عن x_5 باي قيمة فنحصل على x_4 من المعادلة الثالثةو x_3 من المعادلة الثانية. والان تعويض آخر عن x_2 باي قيمة يعطي x_1 من المعادلة الاولى. فعلى سبيل المثال لو اخذنا $x_5 = 2$ و $x_2 = 0$ لحصلنا على $x_4 = -1 + x_5 = 1$

$$x_3 = 3/5 + (3/5)x_5 = 9/5$$
$$x_1 = (6/5) - 3x_2 + (1/5)x_5$$
$$= 8/5$$

وبذلك يكون (8/5,0,9/5,1,2) حلاً خاصاً. ان النظام المتجانس التابع للنظام المعطى والمبسط بطريقة گاوس هو

$$x_1 + 3x_2 - (1/5)x_5 = 0$$
$$x_3 - (3/5)x_5 = 0$$
$$x_4 - x_5 = 0$$

والحل العام يكون

$$x_4 = x_5$$
$$x_3 = (3/5)x_5$$
$$x_1 = -3x_2 + (1/5)x_5$$

بذلك تكون المتجهات

$$A_1 = (-3,1,0,0,0)$$
$$A_2 = (1/5,0,3/5,1,1)$$

قاعدة لفضاء حلول النظام المتجانس وعليه يكون الحل العام.

$$(S_1,S_2,S_3,S_4,S_5) = (8/5,0,9/5,1,2) + aA_1 + bA_2$$
$$= (8/5 - 3a + (1/5)b, a, 9/5 + (3/5)b, 1 + b, 2 + b)$$

كما رأينا فان حل اي نظام يتطلب حسابات كثيرة. يمكننا تقليل الجهد الى حد معين بملاحظة انه لاضرورة ولا حاجة لنقل المتغيرات في مراحل طريقة كاوس. الصيغة المصفوفية تسهل هذه العملية.

لو اعطينا نظاماً خطياً $AX = B$، فيمكننا تكوين مصفوفة جديدة $[A:B]$.

وذلك باضافة عمود جديد هو B على يمين المصفوفة A وبذلك نحصل على مصفوفة جديدة تسمى المصفوفة المصعدة للنظام $AX = B$ (Augmented Matrix).

الان، العمليات الثلاث السابقة الذكر والتي نستخدمها لتبسيط انظمة المعادلات

سوف تقابل العمليات التالية على المصفوفة المصعدة .

(1) : استبدال صفين .

(2): جمع مضاعف صف مع صف آخر .

(3) : ضرب صف بعدد غير صفري .

مثال (3)

المصفوفة المصعدة للنظام الخطي في مثال (2) تكون

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 2 & : & 1 \\ 2 & 6 & -4 & -2 & 4 & : & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & : & -1 \\ 2 & 6 & 1 & -1 & 0 & : & 4 \end{bmatrix}$$

سنحاول اجراء عمليات مماثلة لتلك التي اجريناها في مثال (2) لكن على صفوف المصفوفة المصعدة .

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 2 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & : & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -4 & : & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2-2R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-2R_1 \end{matrix}$$

حيث ان R_2-2R_1 تعني الصف الثاني مضاف اليه (2-) في الصف الأول وهكذا . نستبدل الصف الثاني بالرابع ثم نقسم الثاني الجديد على 5 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 2 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -4/5 & : & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & : & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ 1/5\ R_4 \\ R_3 \\ R_2 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 0 & -3/5 & 2/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1+2R_2 \\ R_2 \\ (1/2)R_3 \\ R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 0 & 0 & -1/5 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1+(3/5)R_3 \\ R_2-(1/5)R_3 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

ان النظام الخطي الذي يقابل هذه المصفوفة سيكون

$$x_1 + 3x_2-(1/5)x_5 = 6/5$$
$$x_3-(3/5)x_5 = 3/5$$
$$x_4-x_5=-1$$
$$0=0$$

وهذا هو النظام المبسط نفسه الذي حصلنا عليه في مثال (2) لكن بجهد اقل حيث اننا لم نكتب المتغيرات في كل مرة .

مثال (4) :

ناقش حلول النظام

$$x_1+2x_2+x_3=8$$
$$-2x_1-3x_2-x_3=-11$$
$$x_1+4x_2+4x_3=21$$

الحل : المصفوفة المصعدة للنظام اعلاه

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ -2 & -3 & -1 & -11 \\ 1 & 4 & 4 & 21 \end{array}\right]$$

والان نجري العمليات الصفية : بضرب الصف الاول في (2) واضافته للصف الثاني ثم ضرب الصف الاول في (1-) واضافته للصف الثالث نحصل على :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \\ R_2+2R_1 \\ R_3-R_1 \end{array}$$

بضرب الصف الثاني في (2-) واضافته للصف الاول ثم للصف الثالث نحصل على

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1-2R_2 \\ R_2 \\ R_3-2R_2 \end{array}$$

بضرب الصف الثالث في (1-) واضافته الى الصف الثاني ثم جمع الصف الثالث مع الاول نحصل على :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1+R_3 \\ R_2-R_3 \\ R_3 \end{array}$$

ان النظام الذي يقابل هذه المصفوفة المبسطة يكون

$$x_1 \qquad = 1$$
$$x_2 \quad = 2$$
$$x_3 = 3$$

وهذا يعني ان للنظام غير المتجانس حل واحد فقط هو

$$x_1 = 1 \ , x_2 = 2 \ , x_3 = 3$$

مثال (5) :

ناقش حلول النظام الخطي :

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 13$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = -2$$
$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7$$

الحل : المصفوفة المصعدة للنظام اعلاه تكون

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 13 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

بضرب الصف الاول في (2-) واضافته للصف الثاني ثم ضرب الصف الاول في (1-) واضافته الى الصف الثالث نحصل على :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 13 \\ 0 & -5 & 7 & -28 \\ 0 & -5 & 7 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}$$

بضرب الصف الثاني في (1-) ثم اضافة الصف الثاني الجديد الى الصف الثالث وضرب الصف الثاني الجديد في (2/5-) واضافته للصف الاول نحصل على :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1/5 & 9/5 \\ 0 & 5 & -7 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1+(2/5)R_2 \\ -R_2 \\ R_3-R_2 \end{array}$$

ان نظام المعادلات الذي يقابل هذه المصفوفة المبسطة هو :

$$x_1-(1/5)x_3=9/5$$
$$5x_2-7x_3=28$$
$$0x_3=22$$

نلاحظ هنا ان المعادلة الثالثة تعني ان $22=0$ وهذا تناقض. هذا يعني ان النظام غير قابل للحل.

في البند الاول ذكرنا مبرهنة (3.1.1) التي اعطت شرطاً ضرورياً وكافياً لكي يكون اي نظام خطي قابلاً للحل. جميع الانظمة المتجانسة تمتلك حلولاً لكن النظام غير المتجانس $AX=B$ يكون قابلاً للحل اذا وفقط اذا كان المتجه B منتمياً الى فضاء اعمدة المصفوفة A. ان عملية تبسيط المصفوفة المصعدة [A:B] بعمليات صفية تكشف عن عدم انتماء B الى فضاء اعمدة A وذلك بالوصول الى تناقض كالذي وصلنا اليه في مثال (5) اعلاه. سوف لن ندخل في تفاصيل البرهان العام لان ذلك يتطلب منا الدخول في مفاهيم جديدة كرتبة المصفوفة واختزال المصفوفات.

تمارين (3.3)

1 ــ اوجد مجموعة الحلول لكل من الانظمة الخطية غير المتجانسة التالية :

(أ)

$$x-y+z=2$$
$$x+y=1$$
$$x+y+z=3$$

(ب)

$$2x+6y-z+w=3$$
$$x-y+z-w=2$$
$$-x-3y+3z+2w=o$$

(جـ)

$$3x+y-z=10$$
$$-x+y+z=0$$
$$2x-y-3z=7$$
$$x-2y-z=-2$$

(د)

$$x+y-z-w=-1$$
$$3x+4y-z-2w=3$$
$$x+2y+z\ \ =5$$

2 ـــ اوجد قيم k التي تجعل النظام التالي قابلاً للحل ثم اوجد مجموعة الحلول في تلك الحالة :

$$x+ky-z=1$$
$$2x+y+2z=5k+1$$
$$x-y+3z=4k+2$$
$$x-2ky+7z=10k-1$$

3 ـــ برهن على ان النظام :

$$x_1+2x_2+3x_3-3x_4=k_1$$
$$2x_1-5x_2-2x_3+12x_4=k_2$$
$$7x_1+x_2+8x_3+5x_4=k_3$$

يكون قابلاً للحل أذا وفقط اذا $37k_1+13k_2-9k_3=o$ اوجد جميع الحلول عندما $k_3=7, k_2=2, k_1=1$.

الفصـــل الرابـــع

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

Eigenvalues and Eigenvectors

(4.0) مقدمـــة :

اذا كان كل من V و W فضاء متجهات منتهي البعد وعلى الحقل نفسه، وكان $T:V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً، فقد برهنا في الفصل الثاني (مبرهنة (2.5.1)) انه بالامكان دائماً ايجاد قاعدة الى كل من V و W بحيث تكون مصفوفة T بالنسبة لذلك الزوج من القواعد بالصيغة الاعتيادية، اي بصيغة بسيطة . عندما يكون $\dim V = \dim W$ فإن مصفوفة T تكون مصفوفة قطرية .

وفي حالة كون $V = W$ فإنه ليس من الضروري ان نستطيع ايجاد قاعدة واحدة الى V تستخدم في المجال والمجال القابل للتحويل $T:V \rightarrow V$ بحيث ان مصفوفة T بالنسبة لتلك القاعدة تكون قطرية وكما موضح في المثال التالي .

لنأخذ $T:R^2 \rightarrow R^2$ تحويلاً خطياً معرفاً بالصيغة : $T(x,y) = (-y,x)$.
لو اردنا ايجاد القواعد التي تجعل مصفوفة T بالنسبة لها بالصيغة الاعتيادية (صيغة قطرية بهذه الحالة) لطبقنا الطريقة التي وردت في برهان المبرهنة (2.5.1) والموضحة في المثال (1) من البند (2.5) . نلاحظ ان :

$$\text{KerT} = \{(x,y): (-y,x) = (0,0)\}$$
$$= \{(0,0)\}$$

نكمل الى قاعدة الى R^2 (المجال) ولتكن تلك القاعدة المكونة من :

$A_1 = (1,0), A_2 = (0,1)$

ضع : $B_1 = T(A_1) = (0,1), B_2 = T(A_2) = (-1,0)$

بهذه الحالة يمكننا ان نستخدم القاعدة $\{A_1, A_2\}$ في المجال والقاعدة $\{B_1, B_2\}$ في المجال المقابل. لكي تكون مصفوفة T بالنسبة للزوج اعلاه من القواعد بالصيغة الاعتيادية :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لكن لاحظ ان $B_1 \neq A_1$ ، $B_2 \neq A_2$.

المسألة المراد دراستها في هذا الفصل هي المسألة التالية :

اذا كان $T:V \to V$ تحويلاً خطياً على فضاء منتهي البعد فمتى وتحت اي شروط يمكن ايجاد قاعدة واحدة الى V تستخدم في المجال والمجال المقابل لكي تكون مصفوفة T مصفوفة قطرية (ليس من الضروري ان تكون جميع عناصر القطر مساوية الى 1).

المثال اعلاه يوضح انه ليست جميع التحويلات تتمتع بهذه الخاصية . وذلك لانه في حالة وجود قاعدة مكونة من المتجهين

$A_1 = (x_1, y_1) , A_2 = (x_2, y_2)$

بحيث ان مصفوفة T بالنسبة للقاعدة اعلاه تكون قطرية .

$$\begin{pmatrix} a_1 & o \\ o & a_2 \end{pmatrix}$$

فإنه يتوجب على T ان يحقق :

$$T(A_1) = a_1 A_1 + oA_2 = a_1 A_1$$
$$T(A_2) = o.A_1 + a_2 A_2 = a_2 A_2$$

وهذا يعني أن :

$$(-y_1, x_1) = a_1 (x_1, y_1)$$
$$(-y_2, x_2) = a_2 (x_2, y_2)$$

عند حل المعادلتين اعلاه ينتج :

$$-y_1 = a_1 x_1, x_1 = a_1 y_1$$
$$-y_2 = a_2 x_2, x_2 = a_2 y_2$$

اذن : $$-y_1 = a_1^2 y_1, -y_2 = a_2^2 y_2$$

في حالة $y_1 \neq o$ نحصل على $a_1^2 = -1$ وهذا تناقض، كذلك فإنه في حالة $y_2 \neq o$ نحصل ايضاً على تناقض في المعادلة $a_2^2 = -1$.

لكن في حالة كون $y_1 = o$ و $y_2 = o$ فإن المتجهين A_1, A_2 يصبحان بالصيغة :

$$A_1 = (x_1, o), A_2 = (x_2, o)$$

وبهذه الحالة لايكونان قاعدة الى R^2 .

نستنتج من هذا استحالة وجود قاعدة الى R^2 تجعل من مصفوفة $T:R^2 \rightarrow R^2$ المعرف اعلاه مصفوفة قطرية في حالة استخدام تلك القاعدة في المجال والمجال المقابل وهذا يوضح عدم بداهة أو بساطة المسألة المطروحة والتي سنحاول الاجابة عليها من خلال بنود هذا الفصل. كذلك فإن عملية تمثيل تحويل خطي $T:V \rightarrow V$ بمصفوفة قطرية تنطوي عليها كثير من التطبيقات وتسهل كثيراً من المسائل كما سنرى في الامثلة المقبلة. سوف نرى ان حا المسألة اعلاه بعتمد على وجود متجهات $A \in V$ غير صفرية واعداد قياسية λ تحقق $T(A) = \lambda A$ هذا النوع من المتجهات يطلق عليه اسم المتجهات الذاتية وتلك الاعداد القياسية ستسمى قيم ذاتية للتحويل الخطي T . سندرس هذا في البند (4.1) ثم نناقش في البند (4.2) مسألة تمثيل التحويلات الخطية بمصفوفات قطرية. اما البندين , (4.4)

(4.3) فقد خصصالدراسة المصفوفات المتشابهة لبرهنة نظرية مهمة في الجبر الخطي تسمى مبرهنة كيلي ــ هاملتون .

(4.1) القيم الذاتية والمتجهات الذاتية والمعادلة المميزة

Eigenvalues and Eigenvectors and The Characteristic equation

اذا كان V فضاء متجهات منتهيَ البعد وعلى الحقل F فنعرف مايلي :

تعريف :

المتجه غير الصفري $A \neq O$ $(A \in V)$ يسمى متجهاً ذاتياً (Eigenvector) للتحويل الخطي $T: V \rightarrow V$ ، اذا وفقط اذا وجد عدد قياسي $\lambda \in F$ بحيث :

$$T(A) = \lambda A$$

تعريف :

العــدد القياســي $\lambda \in F$ يسمــى قيمــة ذاتيــة (Eigenvalue) للتحويــل $T: V \rightarrow V$ ، اذا وفقط اذا وجد متجه $A \neq O$ في V بحيث :

$$T(A) = \lambda A$$

ملاحظة :

حسب التعريفين اعلاه نلاحظ ان المتجه الذاتي يجب ان يكون متجهاً غير صفري لكن لاشيء يجبر القيمة الذاتية بأن تكون غير مساوية للصفر .

عندما يكون $A \in V$ متجهاً غير صفري و $\lambda \in F$ اي عدد قياسي بحيث

$$T(A) = \lambda A$$

فنقول بأن A متجه ذاتي للتحويل الخطي T تابعاً للقيمة الذاتية .

ليس من الضروري ان تتواجد متجهات وقيم ذاتية لاي تحويل خطي ، كما في المثال ادناه .

مثال (1) :

التحويل الخطي $T:R^2 \rightarrow R^2$ المعرف بالصيغة :

$$T(x,y) = (-y, x)$$

ليس لديه متجهات ذاتية ولا قيم ذاتية ، وذلك لانه اذا كان

$$T(x,y) = \lambda(x,y)$$

فإن : $(-y,x) = \lambda (x,y)$

اي : $\lambda x = -y$

$$\lambda y = x$$

بالتعويض نحصل على المعادلتين :

$$(\lambda^2 + 1)x = 0, (\lambda^2 + 1)y = 0$$

وبما ان $\lambda^2 + 1 \neq 0$ فعليه نحصل على

$$x = 0, y = 0$$

هذا يعني عدم وجود متجهات غير صفرية (x,y) تحقق $T(x,y) = \lambda (x,y)$.

مثال (2) :

جد القيم والمتجهات الذاتية للتحويل الخطي $T:R^2 \rightarrow R^2$ ، المعرف بالصيغة : $T(x,y) = (x + 2y, 3x + 2y)$.

الحل: لغرض ايجاد القيم والمتجهات الذاتية للتحويل T ، علينا ايجاد تلك الاعداد الحقيقية λ التي تحقق :

$$T(A) = \lambda A$$

حيث ان $A \neq O$. اذا كان $A = (x,y)$ ، فإن

$$T(x,y) = \lambda (x,y)$$

اي :

$$(x + 2y, 3x + 2y) = (\lambda x, \lambda y)$$

هذا يعني انه يتوجب علينا معرفة متى يكون لنظام المعادلات

$$x + 2y = \lambda x$$
$$3x + 2y = \lambda y$$

حلاً غير تافه . النظام اعلاه يكافيء النظام المتجانس :

$$(1- \lambda)x + 2y = o$$
$$3x + (2 - \lambda) y = o$$

وهذا النظام المتجانس يمتلك حلاً غير تافه اذا وفقط اذا كانت مصفوفة النظام ، مصفوفة غير قابلة للقلب وذلك حسب (نتيجة 3.2.5) .

اي ان :

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = O$$

لكن :

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2- \lambda \end{vmatrix} = (1- \lambda)(2- \lambda) -6$$

$$= 2-3\lambda + \lambda^2 - 6$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda - 4$$
$$= (\lambda -4)(\lambda + 1)$$

اذن تكون القيم الذاتية الى T تلك القيم التي تحقق المعادلة

$$(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

اي :

$$\lambda = 4, \ \lambda = -1$$

الان يجب ايجاد المتجهات الذاتية التابعة لتلك القيم .

هذا يعني حل النظام المتجانس :

$$-3x + 2y = 0$$
$$3x - 2y = 0$$

في حالة $\lambda = 4$. وحل النظام المتجانس :

$$2x + 2y = 0$$
$$3x + 3y = 0$$

في حالة $\lambda = -1$.

النظام الاول يكون حله : $y = (3/2)x$

والنظام الثاني يكون حله : $y = -x$

وبأخذ $x = 2$ في النظام الاول و $x = 1$ في النظام الثاني نحصل على :

المتجه $A = (2,3)$ يكون متجهاً ذاتياً تابعاً للقيمة الذاتية $\lambda = 4$.

المتجه $B = (-1,1)$ يكون متجهاً ذاتياً تابعاً للقيمة الذاتية $\lambda = -1$.

بذلك تكون القيم الذاتية للتحويل T عبارة عن 4 و 1- ، وان جميع المتجهات الذاتية التابعة الى $\lambda = 4$ تكون مضاعفات للمتجه $A = (2,3)$ ، اما المتجهات الذاتية التابعة الى $\lambda = -1$ فهي مضاعفات للمتجه $B = (-1,1)$.

يبدو ان عملية حساب القيم الذاتية لتحويل خطي $T:V \rightarrow V$ عملية طويلة ومتشعبة لكن الحقيقة عكس ذلك وذلك لانه لاتوجد لدينا في الوقت الحاضر اي طرق لايجادها وانما استخدمنا التعريف فقط .

المبرهنة التالية عبارة عن الخطوة الاولى لايجاد طريقة سريعة لحساب القيم الذاتية .

مبرهنة (4.1.1) :

اذا كان $T:V \rightarrow V$ تحويلاً خطياً وكانت M مصفوفة T بالنسبة للقاعدة $G = \{A_1, \dots, A_n\}$ و $M^\star$ مصفوفة T بالنسبة لقاعدة اخرى $G^\star = \{A_1^\star, \dots, A_n^\star\}$ فإن :

$$\det(M - \lambda I) = \det(M^\star - \lambda I)$$

وذلك لاي عدد قياسي λ . I تمثل المصفوفة المحايدة .

البرهان :

بما ان M و $M^\star$ مصفوفتان لتحويل خطي واحد لكن بالنسبة لقواعد مختلفة ، فعليه توجد مصفوفة قابلة للقلب P تحقق $M^\star = PMP^{-1}$

وذلك حسب المبرهنة (2.5.2) .

الان نلاحظ :

$$\begin{aligned}
\det(M^\star - \lambda I) &= \det(PMP^{-1} - \lambda I) \\
&= \det(PMP^{-1} - \lambda PIP^{-1}) \\
&= \det[P(M - \lambda I)P^{-1}] \\
&= \det(P) . \det(M - \lambda I). \det(P^{-1}) \\
&= \det(M - \lambda I). \det(P). \det(P^{-1}) \\
&= \det(M - \lambda I). 1 \\
&= \det(M - \lambda I)
\end{aligned}$$

(و . هـ . م)

اذا كانت $M = (a_{ij})$ مصفوفة التحويل الخطي $T:V \rightarrow V$ بالنسبة الى قاعدة معينة فإن

$$\det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

وبفك المحدد اعلاه نحصل على :

$$\det(M-\lambda I)=(-1)^n\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\ldots+b_{n-1}\lambda+b_n$$

المبرهنة (4.1.1) تنص على ان متعددة الحدود اعلاه لاتتغير عندما M تستبدل بالمصفوفة M^{*} التي هي مصفوفة التحويل الخطي T نفسه، لكن بالنسبة الى قاعدة اخرى . هذا يمكننا من وضع التعريف التالي .

تعريف :

اذا كان $T:V\to V$ تحويلاً خطياً على فضاء المتجهات المنتهي البعد V ، حيث $\dim V=n$ ، وكانت M مصفوفة T بالنسبة لأي قاعدة كانت فإن متعددة الحدود :

$$\Delta(t)=(-1)^n t^n+b_{n-1}t^{n-1}+\ldots+b_1t+b_o=\det(M-tI)$$

تسمى متعددة الحدود المميزة (Characteristic Polynomial) للتحويل الخطي T .

حيث ان t متغير ، والمعاملات $b_o,\ldots,b_{n-1}$ تكون من الحقل F ، حقل الفضاء V .

مثال (3) :

جد متعددة الحدود المميزة للتحويل الخطي $T:R^2\to R^2$ المعرف بالصيغة :

$T(x,y)=(2x-y,4x)$

الحل : اولاً نحاول حساب مصفوفة T بالنسبة لأي قاعدة . أبسط القواعد هي القواعد الطبيعية . كما في البند (2.4) ، يتضح ان المصفوفة .

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

تكون مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية .

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \det(M - tI) \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \\ &= (2-t)(-t) - (1)(-1) \\ &= t^2 - 2t + 1 \end{aligned}$$

عليه تكون متعددة الحدود المميزة للتحويل الخطي T اعلاه .

$$\Delta(t) = t^2 - 2t + 1$$

مثال (4) :

~~جد متعددة الحدود~~ المميزة للتحويل الخطي $T: C^2 \rightarrow C^2$ المعرف بالصيغة :

$$T(Z_1, Z_2) = (Z_1 - iZ_2, (1+i)Z_1 - 3iZ_2)$$

(اعتبرنا هنا ان C^2 فضاء متجهات على الحقل C ، حقل الاعداد العقدية) .

الحل : مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية تكون :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -i & -3i \end{bmatrix}$$

عليه تكون متعددة الحدود المميزة :

$$\Delta(t) = \det(M - tI)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-t & 1+i \\ -i & -3i - t \end{vmatrix}$$

$$= (1-t)(-3i - t) - (1+i)(-i)$$

$$= t^2 + (-1+3i)\, t - (1+3i)$$

نرجع الان لمسألة القيم الذاتية للتحويل الخطي $T:V \rightarrow V$.

مبرهنة (4.1.2) :

اذا كان $T:V \rightarrow V$ تحويلاً خطياً على فضاء متجهات منتهي البعد وبعده يساوي n وكانت $\Delta(t)$ المعادلة المميزة الى T فإن λ تكون قيمة ذاتية للتحويل T اذا وفقط اذا كانت λ جذراً للمعادلة $\Delta(t) = o$ ، اي $\Delta(\lambda) = o$.

البرهان :

لنفرض ان λ قيمة ذاتية للتحويل T . عليه يوجد متجهاً غير صفري $A \in V$ يحقق :

$$T(A) = \lambda . A = \lambda I(A)$$

حيث ان $I:V \rightarrow V$ يمثل التحويل المحايد . بمراجعة جمع التحويلات الخطية وضربها بأعداد قياسية نستنتج ان

$$(T - \lambda I) A = O$$

وهذا يعني ان : $A \in Ker(T-\lambda I)$. لكن $A \neq O$. اذن $Ker(T-\lambda I) \neq \{O\}$
وعليه فأن نتيجة (2.3.4) تنص على ان التحويل $T-\lambda I: V \rightarrow V$ لايكون تشاكلاً . الان النتيجة (2.4.4) تنتج ان مصفوفة $T-\lambda I$ بالنسبة لاي قاعدة كانت تكون مصفوفة غير قابلة للقلب . فاذا كانت M تمثل مصفوفة T بالنسبة لأي قاعدة فأن $M-\lambda I$ تمثل مصفوفة $T-\lambda I$ بالنسبة لتلك القاعدة . اي ان المصفوفة $M-\lambda I$ غير قابلة للقلب . وهذا يعني ان محددها يكون مساوياً للصفر . اي ان :

$$\Delta(\lambda) = \det(M-\lambda I) = O.$$

على العكس لو كان $\Delta(\lambda) = O$ فإن المصفوفة $M-\lambda I$ ستكون غير قابلة للقلب وعليه سوف لايكون التحويل $T-\lambda I$ تشاكلاً وبالتالي يكون $Ker(T-\lambda I) \neq \{O\}$ وبهذا يوجد متجه $A \neq O$ في V بحيث ان : $A \in Ker(T-\lambda I)$.

وهذا يعني ان

$$(T-\lambda I)A = O$$

$$T(A) - \lambda I(A) = O$$

$$T(A) - \lambda A = O$$

اي :

$$T(A) = \lambda A$$

اي بمعنى ان λ تكون قيمة ذاتية للتحويل الخطي T .

(و . هـ . م)

المعادلة $\Delta(t) = O$ تسمى بالمعادلة المميزة للتحويل الخطي T والمبرهنة اعلاه تنص على ن القيم الذاتية للتحويل الخطي T هي جذور المعادلة المميزة .

مثال (5) :

جد القيم الذاتية للتحويل الخطي $T: R^2 \rightarrow R^2$ المعرف في المثال (2) من هذا البند .

الحل :

بمراجعة المثال (2) يتضح ان

$$T(x,y) = (x + 2y, 3x + 2y)$$

مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية تكون

$$\dot{M} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

المعادلة المميزة الى T تكون

$$\Delta\ (t) = \det (M - tI) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 3 \\ 2 & 2-t \end{bmatrix} = 0$$

اي ان

$$(1 - t)(2 - t) - 6 = 0$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

أو

$$(t - 4)(t + 1) = 0$$

اذن تكون القيم الذاتية الى T عبارة عن قيمتان $t = 4$, $t = -1$.

مثال (6) :

جد القيم الذاتية للتحويل الخطي $T:P_1(R) \rightarrow P_1(R)$ المعرف بالصيغة $T(a + bx) = -b + ax$

الحل : مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية$\{1, x\}$ تكون

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

عليه تكون المعادلة المميزة الى T

$$\det(M - tI) = \det \begin{bmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{bmatrix} = 0$$

$$t^2 + 1 = 0$$

لكن هذه المعادلة غير قابلة للحل على حقل الاعداد الحقيقية وعليه ليس لها جذور وبالتالي لاتوجد قيم ذاتية للتحويل اعلاه .

مثال (7) :

جد القيم والمتجهات الذاتية للتحويل الخطي $T:P_1(C) \rightarrow P_1(C)$
المعرف بالصيغة : $T(a + bx) = -b + ax$

الحل : مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية$\{1,x\}$ تكون

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

وكما في المثال (6) اعلاه ، تكون المعادلة المميزة الى T :

$$t^2 + 1 = 0$$

وبما ان الحقل بهذه الحالة هو حقل الاعداد العقدية C ، فعليه يكون للمعادلة اعلاه حلان هما i و -i . بهذا توجد قيمتان ذاتيتان هما $\lambda = i$ و $\lambda = -i$.

(لاحظ هنا ان الفرق بين هذا المثال والمثال (6) هو تغير الحقل . اما التحويل الخطي

T فهو بالصيغة نفسها ، بمجرد تغير الحقل تحولت حالة T من عدم امتلاك قيم ذاتية الى امتلاكها .) .

لغرض ايجاد المتجهات الذاتية التابعة للقيمة الذاتية λ ، نلاحظ انه لأي قيمة ذاتية يوجد متجه ذاتي غير صفري A يحقق

$$(T - \lambda I) A = O$$

فإذا افترضنا ان المتجه $A = a + bx$ فإن متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة الطبيعية $\{1, x\}$ هو المتجه $X = (a,b)$ وعليه يمكن كتابة المعادلة أعلاه بالصيغة المصفوفية بالشكل :

$$X (M - \lambda I) = O$$

حيث ان M مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية .

عندما $\lambda = i$ نحصل على المعادلة

$$(a , b)\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} = O$$

اي :

$$-ia - b = 0$$
$$a - ib = 0$$

هاتان المعادلتان عبارة عن معادلة واحدة على حقل الاعداد العقدية حيث ان المعادلة الثانية عبارة عن i مضروبة في المعادلة الاولى . عليه يكون الحل :

$$b = - ia$$

عند وضع $a = 1$ نحصل على $b = -i$ وبالتالي المتجه

$$X = (1 , -i)$$

الذي يمثل متجه احداثيات $A = 1 - ix$. اذن $A \in P_1(C)$ وان اي مضاعف لهذا المتجه يكون ايضاً متجهاً ذاتياً تابعاً للقيمة الذاتية $\lambda = i$.

بالطريقة نفسها نحصل على المتجه $B = 1 + i x$ كمتجه ذاتي تابع للقيمة الذاتية $\lambda = -i$.

تماريـن (4.1)

1 ــ اوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لكل من التحويلات الخطية الاتية :

(أ) $T:R^2 \rightarrow R^2$ ، $T(x,y) = (3x + 3y, x + 5y)$.

(ب) $T:R^3 \rightarrow R^3$ ، $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$.

(ج) $T:P_2(R) \rightarrow P_2(R)$.

$$T(a_o + a_1x + a_2x^2) = (5a_o + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)\,x + (a_o - 2a_2)x^2 .$$

(د) $T:M_2(R) \rightarrow M_2(R)$.

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$$

(هـ) $T: C^2 \rightarrow C^2$ ، $T(z_1,z_2) = (z_1 - z_2, 2z_1)$.

(اعتبر C^2 فضاءا على حقل الاعداد العقدية) .

2 ــ يعرف اثر (trace) المصفوفة المربعة على انه مجموع العناصر في القطر الرئيسي . اثبت ان المعادلة المميزة لأي تحويل خطي $T:R^2 \rightarrow R^2$ تكون من النوع :

$$t^2 - tr(M)\,t + det\,(M) = o$$

حيث ان M مصفوفة T بالنسبة لأي قاعدة .

3 ــ برهن على ان الحد الثابت في متعددة الحدود المميزة لأي تحويل خطي يساوي محدد مصفوفة التحويل بالنسبة لأي قاعدة كانت .

4 ــ برهن على ان التحويل الخطي $T:V \rightarrow V$ يكون تحويلاً معتلاً اذا وفقط اذا كانت $\lambda = o$ قيمة ذاتية الى T .

5 ــ اذا كان $T:V \rightarrow V$ تحويلاً غير معتل و $A \in V$ متجه ذاتي الى T تابعاً

للقيمة الذاتية λ فبرهن على ان A يكون متجهاً ذاتياً الى T^{-1} تابعا للقيمة الذاتية $1/\lambda$.

6 ــ اذا كان $T:V \to V$ تحويلاً خطياً بحيث $T^k = ToTo \ldots oT = O$ لعدد صحيح موجب k فبرهن على ان جميع القيم الذاتية الى T تكون مساوية للصفر .

7 ــ اذا كان $A \in V$ متجهاً ذاتياً للتحويل الخطي $T:V \to V$ تابعاً للقيمة الذاتية λ فبرهن على ان A يكون متجهاً ذاتياً الى T^n تابعاً للقيمة الذاتية λ^n وذلك لأي عدد طبيعي n .

8 ــ اذا كان كل من $S, T: V \to V$ تحويلاً خطياً بحيث ان $ST = TS$ ، واذا كان $A \in V$ متجهاً بحيث $T(A) = \lambda A$. اذا كان كذلك $S(A) \neq 0$ فبرهن على ان $S(A)$ يكون متجهاً ذاتياً للتحويل T تابعاً للقيمة الذاتية λ .

9 ــ اذا كان $T:R^3 \to R^3$ تحويلاً خطياً معرفاً بالصيغة :

$$T(x, y, z) = (o, x, y)$$

فجد متعددة الحدود المميزة الى كل من T ، T^2 ، T^3 .

10 ــ جد تحويلاً خطياً $T:R^2 \to R^2$ يمتلك $A = (1, 2)$ كمتجه ذاتي تابع للقيمة الذاتية $\lambda = 5$.

11 ــ جد تحويلاً خطياً $T:P_2(R) \to P_2(R)$ يمتلك $A = 1 + x$ كمتجه ذاتي تابع للقيمة الذاتية $\lambda = 2$ و $B = -2x^2$ كمتجه ذاتي تابع للقيمة الذاتية $\lambda = 4$.

12 ــ اذا كان V فضاء متجهات على الحقل F و $A \in V$ متجه ذاتي لكل من التحويلين $S, T:V \to V$ فبرهن على ان A يكون متجهاً ذاتياً للتحويل $aS + bT$ وذلك لأي عددين قياسيين $a, b \in F$.

(4.2) الفضاء الذاتي وقابلية تمثيل تحويل خطي بمصفوفة قطرية

Eigen Space and Diagonalization of a linear transformation

لاحظنا من خلال الأمثلة السابقة انه بتحديد قيمة ذاتية لتحويل خطي $T:V \to V$ فإنه يوجد اكثر من متجه ذاتي تابع لتلك القيمة الذاتية. فإذا كانت قيمة ذاتية للتحويل الخطي $T:V \to V$ فنعرف :

$$V_\lambda = \{A \in V: T(A) = \lambda A\}$$

اي ان V_λ عبارة عن تلك المجموعة المحتوية على جميع المتجهات الذاتية التابعة للقيمة الذاتية λ بمعية المتجه الصفري. يمكن بسهولة التحقق من ان المجموعة V_λ تكون فضاءاً جزئياً من V . هذا الفضاء الجزئي يسمى الفضاء الذاتي التابع للقيمة الذاتية λ .

مثال (1) :

جد القيم الذاتية والفضاءات الذاتية التابعة لها، للتحويل الخطي $T:R^3 \to R^3$.

المعرف بالصيغة : $T(x, y, z) = (x, y, -2z)$

الحل : ان مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية تكون

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

عليه تكون المعادلة المميزة الى T كالأتي :

$$|M - tI| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & -2-t \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(t) = (1-t)^2(-2-t) = 0$$

بذلك توجد قيمتان ذاتيتان مختلفتان

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

(لاحظ ان القيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ مكررة مرتين).

لايجاد الفضاء الذاتي V_1 يجب علينا حل نظام المعادلات

$$(x, y, z) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = (0, 0, 0)$$

وهذا يؤدي الى ان $z = o$.

هذا يعني انه حتى يكون المتجه $A = (x, y, z)$ غير الصفري، متجهاً ذاتياً تابعاً للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ ، يجب ان يكون $z = o$. بهذا يمكن وصف الفضاء الذاتي V_1 كالاتي :

$$V_1 = \{(x, y, o) : x, y \in R\}$$

لغرض ايجاد الفضاء الذاتي V_{-2} التابع للقيمة الذاتية $\lambda = -2$ يجب حل نظام المعادلات :

$$(x, y, z)(M + 2I) = (0,0,0)$$

$$(x, y, z)\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0, 0, 0)$$

وهذا النظام يؤدي الى معادلتين هما

$$x = 0 , y = 0$$

هذا يعني ان

$$V_{-2} = \{(0,0,z): z \in R\}$$

نلاحظ من المثال اعلاه ان القيم الذاتية يمكن ان تتكرر لذلك نضع التعريف التالي .

تعريف :

اذا كان $T:V \to V$ تحويلاً خطياً ، وكانت λ قيمة ذاتية للتحويل T ، فبتكرار λ الجبري نقصد اس الحد $(t - \lambda)$ في متعددة الحدود المميزة بعد تحليلها الى عواملها الاولية.وبتكرار λ الهندسي نقصد بعد الفضاء الذاتي V_λ ، اي $\dim V_\lambda$.

ملاحظة :

اذا كان تكرار λ الجبري $= n$ فإن متعددة الحدود المميزة الى T تكون بالصيغة $\Delta(t) = (t-\lambda)^n g(t)$ ، حيث ان $g(t)$ متعددة حدود بحيث ان λ لاتكون جذراً لها .

مثال (2) :

جد التكرار الجبري والهندسي لكل قيمة ذاتية ظهرت في المثال (1) .

الحل : متعددة الحدود المميزة كانت $\Delta(t) = (1-t)^2(-2-t)$

بهذا يكون التكرار الجبري للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ يساوي 2 . اما التكرار الجبري للقيمة الذاتية $\lambda = -2$ فيساوي 1 . لايجاد التكرارات الهندسية يجب علينا معرفة بعد كل من الفضاءين V_1, V_{-2} . نلاحظ بأن المتجهين $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0)$ يكونان قاعدة الى V_1 وبذلك يكون $\dim V_1 = 2$.

اما V_{-2} فهو فضاء احادي البعد . اي $\dim V_{-2} = 1$.

اذن : تكرار $\lambda = 1$ الهندسي $= 2$

تكرار $\lambda = -2$ الهندسي $= 1$.

المبرهنة التالية تعطي العلاقة بين التكرارين الجبري والهندسي .

مبرهنة (4.2.1) :

لأي تحويل خطي $T : V \to V$ على فضاء متجهات منتهي البعد V ولأي قيمة ذاتية λ لذلك التحويل يكون :

تكرار λ الجبري $\geq$ تكرار λ الهندسي

ا لبرهان :

نفرض ان تكرار λ الهندسي يساوي k . هذا يعني ان اي قاعدة الى V_λ تتكون من k من المتجهات . لنختار المتجهات $A_1, \ldots, A_k$ كقاعدة الى V_λ . بذلك يكون

$$T(A_i) = \lambda A_i , (i: 1, \ldots, k)$$

نكمل المجموعة $\{A_1, \ldots, A_k\}$ الى قاعدة $\{A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n\}$ الى V (افترضنا ان بعد $V = n$) بذلك تكون مصفوفة T بالنسبة للقاعدة اعلاه بالصيغة :

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \lambda & 0 \cdots\cdots & 0 \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots a_{k+1,k} & \cdots & a_{k+1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots a_{n,k} \cdots & & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

يمكن تجزئة المصفوفة اعلاه الى قوالب وكتابتها بالصيغة

$$M = \begin{bmatrix} \lambda I_k & O \\ B & C \end{bmatrix}$$

حيث ان I_k تمثل المصفوفة المحايدة $k \times k$, B مصفوفة ذات درجة $(n-k) \times k$ و C مصفوفة ذات درجة $(n-k) \times (n-k)$ و O مصفوفة صفرية ذات درجة $k \times (n-k)$.

المعادلة المميزة للتحويل T تكون :

$$\Delta(t) = \det(M - tI)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda I_k & O \\ B & C \end{bmatrix} - t \begin{bmatrix} I_k & O \\ O & I_{n-k} \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} (\lambda - t) I_k & O \\ B & C - tI_{n-k} \end{bmatrix}$$

$$= \det(\lambda - t)I_k . \det(C - tI_{n-k})$$

$$= (\lambda - t)^k \det(C - t\, I_{n-k})$$

بهذا يكون $(\lambda - t)^k$ عامل من عوامل متعددة الحدود المميزة $\Delta(t)$ وعليه فإن تكرار λ الجبري يكون اكبر او مساوياً الى k .

(و . هـ . م)

نحن الان في موقع يسمح لنا بالاجابة على السؤال الذي طرحناه في بداية هذا الفصل ولغرض ان نعيد طرح السؤال بلغة اسهل نقدم التعريف التالي :

تعريف :

اذا كان $T:V \rightarrow V$ تحويلاً خطياً على فضاء متجهات منتهي البعد واذا وجدت قاعدة الى V تستخدم في المجال والمجال المقابل بحيث ان مصفوفة T بالنسبة لتلك القاعدة تكون مصفوفة قطرية فنقول بأن T قابل للاقطار (Diagonalizable).

السؤال الذي طرحناه في بداية هذا الفصل هو : تحت اي شروط يكون التحويل الخطي T قابلاً للاقطار .

الجواب يكمن في المبرهنة (4.2.3) ... ولغرض البرهان سوف نكون بحاجة الى المبرهنة التالية :

مبرهنة (4.2.2) :

ليكن $T:V \rightarrow V$ تحويلاً خطياً . لتكن $\lambda_1, ..., \lambda_m$ قيماً ذاتية مختلفة الى T ولتكن $A_1, ..., A_m$ متجهات ذاتية تابعة للقيم الذاتية $\lambda_1, ..., \lambda_m$ على التوالي . عندئذ تكون المتجهات $A_1, ..., A_m$ مستقلة خطياً .

البرهان :

لنفرض ان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_m\}$ مرتبطة خطياً . عندئذ يمكن كتابة احد المتجهات كتركيب خطي من المتجهات التي تسبقه وذلك حسب المبرهنة (1.7.4) بتطبيق هذه الفكرة عدة مرات يمكننا ان نفترض على ان المتجه A_k يمكن كتبته كتركيب خطي من المتجهات المستقلة خطياً $A_1, \ldots, A_{k-1}$. اي ان .

$$A_k = x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_{k-1}A_{k-1} \ldots (1)$$

عندئذ يكون :

$$T(A_k) = x_1T(A_1) + x_2T(A_2) + \ldots + x_{k-1}T(A_{k-1})$$

بما ان A_i يكون متجهاً ذاتياً تابعاً للقيمة الذاتية λi وذلك لكل $1 \leq i \leq k$ فإذن

$$\lambda_k A_k = x_1 \lambda_1 A_1 + \ldots + x_{k-1}\lambda_{k-1}A_{k-1} \ldots (2)$$

بضرب المعادلة (1) في λ_k ينتج :

$$\lambda_k A_k = x_1 \lambda_k A_1 + \ldots + x_{k-1} \lambda_k A_{k-1} \ldots (3)$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (3) ينتج :

$$O = (x_1\lambda_k - x_1\lambda_1)A_1 + \ldots + (x_{k-1}\lambda_k - x_{k-1}\lambda_{k-1})A_{k-1}$$

بما ان المتجهات $A_1, \ldots, A_{k-1}$ مستقلة خطياً بالفرض . اذن

$$x_1(\lambda_k - \lambda_1) = x_2(\lambda_k - \lambda_2) = \ldots = x_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0$$

بما ان $\lambda i \neq \lambda j$ لكل $i \neq j$ ، بالفرض فإن

$$\lambda_k - \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_k - \lambda_2 \neq 0, \ldots, \lambda_k - \lambda_{k-1} \neq 0$$

عليه فإن $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_{k-1} = 0$

بالتعويض في المعادلة (1) نستنتج ان $A_k = O$.

لكن A_k متجه ذاتي ولا يمكن ان يكون مساوياً للصفر .

هذا التناقص نتج من الفرضية القائلة بأن المجموعة $\{A_1, \ldots, A_m\}$ مرتبطة خطياً وعليه يجب ان تكون مستقلة خطياً .

(و . هـ . م)

مبرهنة (4.2.3)

ليكن $T:V \to V$ تحويلاً خطياً على فضاء المتجهات المنتهي البعد V وليكن $\dim V = n$ عندئذ يكون T قابلاً للاقطار اذا وفقط اذا تحقق الشرطان التاليان :ـــ

1 ـــ متعددة الحدود المميزة الى T تتحلل الى حاصل ضرب عوامل خطية ، اي ان : $\Delta_T(t) = (t - \lambda_1)^{r_1}(t - \lambda_2)^{r_2} \ldots (t - \lambda_k)^{r_k}$.

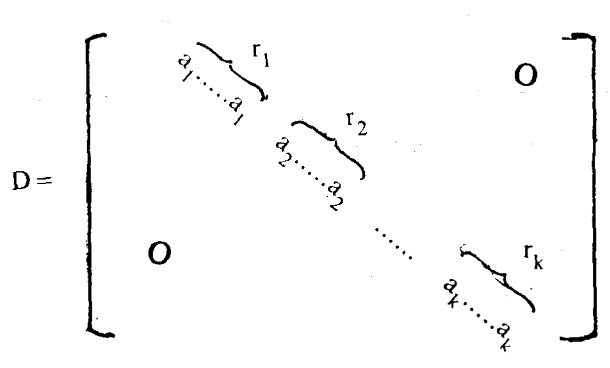
2 ـــ لكل قيمة ذاتية λ الى T يكون

تكرار λ الجبري = تكرار λ الهندسي

(اي ان هنالك عدداً من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً والتابعة للقيمة الذاتية λ مساوياً الى تكرار λ الجبري) .

البرهان :

لنفرض ان T يكون قابلاً للاقطار . هذا يعني انه توجد قاعدة $\{A_1, \ldots, A_n\}$ الى V بحيث ان مصفوفة T بالنسبة لتلك القاعدة تكون مصفوفة قطرية :



حيث ان $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$.

بهذه الحالة تكون متعددة الحدود المميزة الى T .

$$\Delta(t) = (a_1 - t)^{r_1} (a_2 - t)^{r_2} \ldots (a_k - t)^{r_k}$$

وهذا عبارة عن حاصل ضرب عوامل خطية . بذلك اثبتنا الشرط الاول . ولاثبات الشرط الثاني نلاحظ ان المصفوفة D تعطينا مايلي :

$T(A_1) = a_1 A_1, \ldots, T(A_{r_1}) = a_1 A_{r_1}$

$T(A_{r_1+1}) = a_2 A_{r_1+1}, \ldots, T(A_{r_1+r_2}) = a_2 A_{r_1+r_2}$
$\vdots$
$T(A_{n-r_k+1}) = a_k A_{n-r_k+1}, \ldots, T(A_n) = a_k A_n$

هذا يعني ان

مجموعة المتجهات $A_1, \ldots, A_{r_1}$ تكون متجهات ذاتية تابعة للقيمة الذاتية $\lambda = a_1$.

مجموعة المتجهات $A_{r_1+1}, \ldots, A_{r_1+r_2}$ تكون متجهات ذاتية تابعة للقيمة الذاتية $\lambda = a_2$.

وهكذا . حتى نحصل على :

مجموعة المتجهات $A_{n-r_k+1}, \ldots, A_n$ تكون متجهات ذاتية تابعة للقيمة الذاتية $\lambda = a_k$.

بما ان مجموعة المتجهات $A_1, \ldots, A_n$ تكون مجموعة مستقلة خطياً . اذن كل من المجموعات الجزئية اعلاه تكون مستقلة خطياً وبهذا يكون لدينا

تكرار a_j الجبري $= r_j = \dim V_{a_j} =$ تكرار a_j الهندسي .

وذلك لكل $j = 1, \ldots, k$.

وبما ان $a_1, \ldots, a_k$ هو كل مايوجد من قيم ذاتية .

اذن تحقق الشرط الثاني .

على العكس، لنفرض ان الشرطين الاول والثاني يتحققان. المطلوب ان نبرهن على ان T يكون قابلاً للاقطار.

الشرط الاول ينتج ان متعددة الحدود المميزة الى T تكون بالصيغة

$$\Delta(t) = (t - \lambda_1)^{r_1}(t - \lambda_2)^{r_2} \dots (t - \lambda_k)^{r_k}$$

حيث ان $\lambda_i \neq \lambda_j$ عندما يكون $i \neq j$.

هذا يعني ان كل من λ_i تكون قيمة ذاتية الى T بتكرار جبري يساوي r_i وذلك لكل $i = 1, \dots, k$.

الشرط الثاني ينتج ان: تكرار λ_i اهندسي $= r_i$.

هذا يعني :ـ $\dim V_{\lambda_i} = r_i$ و $(i = 1, \dots, k)$

اي انه توجد r_1 من المتجهات الذاتية $A_1, \dots, A_{r_1}$ المستقلة خطياً والتابعة للقيمة الذاتية λ_1.

وتوجد r_2 من المتجهات الذاتية $A_{r_1+1}, \dots, A_{r_1+r_2}$ المستقلة خطياً والتابعة للقيمة الذاتية λ_2. وهكذا حتى نصل الى وجود r_k من المتجهات الذاتية $A_{n-r_k+1}, \dots,$ A_n المستقلة خطيا والتابعة للقيمة الذاتية λ_k. حيث اننا استخدمنا العلاقة $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.

الآن المجموعة:

$$\{A_1, \dots, A_{r_1}, A_{r_1+1}, \dots, A_{r_2}, \dots, A_{n-r_k+1}, \dots A_n\}$$

تكون مستقلة خطياً وذلك حسب المبرهنة (4.2.2) لانها متجهات ذاتية تابعة لقيم ذاتية مختلفة. بما ان عدد المتجهات في المجموعة اعلاه يساوي n، فعليه تكون قاعدة للفضاء V وذلك لان بعد V يساوي n بالفرض. الان نحسب مصفوفة T بالنسبة لهذه القاعدة.

$$T(A_1) = \lambda_1 A_1$$

$$T(A_2) = \lambda_1 A_2$$

$$\vdots$$

$$T(A_{r_1}) = \lambda_1 A_{r_1}$$

$$T(A_{r_1+1}) = \lambda_2 A_{r_1+1}$$

$$\vdots$$

$$T(A_{r_1+r_2}) = \lambda_2 A_{r_1+r_2}$$

$$T(A_{n-r_k+1}) = \lambda_k A_{n-r k+1}$$

$$\vdots$$

$$T(A_n) = \lambda_k A_n$$

عليه تكون مصفوفة T بالصيغة

$$D = \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{r_1} & & & O \\ & \overbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}^{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \overbrace{\lambda_k \cdots \lambda_k}^{r_k} \end{bmatrix}$$

اي انها مصفوفة قطرية .

(و . هـ . م)

ملاحظة :

نستخلص من البرهان اعلاه النتيجة التالية :

نتيجة (4.2.4) :

التحويل الخطي $T:V \to V$ يكون قابلاً للاقطار اذا وفقط اذا وجدت قاعدة الى V مكونة من متجهات ذاتية الى T .

سنذكر فيما يلي نتيجة لها فائدة كبيرة في مسألة معرفة قابلية الاقطار لأي تحويل خطي .

نتيجة (4.2.5) :

اذا كان للتحويل الخطي $T:V \rightarrow V$ قيم ذاتية مختلفة ومساوية بالعدد لبعد الفضاء V فإن T يكون قابلاً للاقطار .

البرهان :

القيم الذاتية المختلفة تعطي متجهات ذاتية مستقلة خطياً وذلك حسب المبرهنة (4.2.2)، عدد هذه المتجهات المستقلة خطياً يساوي بعد الفضاء V وبالتالي تكون المتجهات الذاتية الى T قاعدة الى V والان النتيجة (4.2.4) تعطي المطلوب .

(و. هـ . م)

مثال (3) :

قرر فيما اذا كان التحويل الخطي $T:R^3 \rightarrow R^3$ ، المعرف بالصيغة

$$T(x,y,z) = (-x, 6x-13y-9z, -12x+30y+20z)$$

قابلاً للاقطار .

الحل : مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية تكون كما يلي

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}$$

المعادلة المميزة الى T تكون كما يلي

$$\Delta(t) = \det(M - tI) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-t & 6 & -12 \\ 0 & -13-t & 30 \\ 0 & -9 & 20-t \end{vmatrix} = 0$$

عند نشر المحدد اعلاه ينتج $(t+1)(t-2)(t-5) = 0$ اذن تكون القيم الذاتية للتحويل اعلاه كما يلي

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 5$$

وهذه قيم ذاتية مختلفة وعددها يساوي 3 الذي هو بعد الفضاء R^3 . اذن حسب النتيجة (4.2.5) يكون T قابلاً للاقطار .

ان النتيجة (4.2.5) تعطي شرطاً كافياً لكي يكون التحويل الخطي قابلاً للاقطار لكن هذا الشرط (وجود قيم ذاتية مختلفة مساوية بالعدد لبعد الفضاء) ليس ضرورياً كما موضح في المثال التالي :

مثال (4) :

قرر فيما اذا كان التحويل الخطي $T:R^3 \rightarrow R^3$ المعرف بالصيغة

$$T(x, y, z) = (x - 2z, 0, -2x + 4z)$$

قابلاً للاقطار .

الحل: مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية تكون كما يلي :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

المعادلة المميزة الى T تكون كما يلي :

$$-t^3 + 5t^2 = o$$

$$t^2 (-t + 5) = o$$

القيم الذاتية الى T هي : $\lambda_2 = 5, \lambda_1 = 0$

هنا يكون عدد القيم الذاتية المختلفة غير مساوٍ الى بعد الفضاء. لذلك نلجأ الى المبرهنة (4.2.3) ومنها نجد ان T يكون قابلاً للاقطار اذا وفقط اذا كان :

$$\dim V_5 = 1, \dim V_o = 2$$

لهذا الغرض نحاول حساب الفضاءات الذاتية V_5, V_o بطريقة مماثلة للمثال (1) من هذا البند نجد ان :

$$V_o = \{(2z, y, z): y, z \in R\}$$

وهذا يعني ان V_o له قاعدة مكونة من متجهين ذاتيين مثل (2, 0,1) و (0,1,0) أي أن $\dim V_o = 2$.

بما ان لكل قيمة ذاتية يوجد متجه ذاتي على الأقل فإن $\dim V_5 = 1$ والآن نستطيع القول بأن T قابل للاقطار .

مثال (5) :

جد القيم والفضاءات الذاتية للتحويل الخطي $T:P_2(R) \rightarrow P_2(R)$ المعرف بالصيغة :

$$T(a + bx + cx^2) = 2a + (a + b + 2c)\,x + (-b + 4c)\,x^2$$

ثم قرر فيما اذا كان T قابلاً للاقطار .

الحل : مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية $\{1, x, x^2\}$ تستخرج كما يلي :

$$T(1) = 2 + x = 2(1) + 1(x) + 0(x^2)$$

$T(x) = x - x^2 = o(1) + 1(x) + (-1)(x^2)$

$T(x^2) = 2x + 4x^2 = o(1) + 2(x) + (4)(x^2)$

بهذا تكون مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية كما يلي .

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

المعادلة المميزة الى T تكون :

$\Delta(t) = -(t-2)^2 (t-3) = o$

بهذا تكون $\lambda = 2$ ، $\lambda = 3$ قيم ذاتية الى T .

بحيث ان تكرار $\lambda = 2$ الجبري = 2، تكرار $\lambda = 3$ الجبري = 1 .

لايجاد الفضاءات الذاتية يجب علينا حل النظام الخطي ادناه .

$$(a, b, c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = (0,0,0)$$

وذلك بالنسبة للقيمة الذاتية $\lambda = 2$ ، وحل النظام الخطي

$$(a, b, c) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (0,0,0)$$

وذلك بالنسبة للقيمة الذاتية $\lambda = 3$.

النظام الاول يؤدي الى المعادلتين

$$a - b + 2c = o$$

$$-b + 2c = o$$

الحل بهذه الحالة يكون : $a = o$ و $b = 2c$

(تذكر بأننا سنحصل على متجه احداثيات المتجه الذاتي)، بذلك يكون الفضاء الذاتي التابع للقيمة الذاتية $\lambda = 2$ ، كما يلي .

$$V_2 = \{a + bx + cx^2 : a = o, b = 2c\}$$
$$= \{2cx + cx^2 : c \in R\}$$

من هنا نلاحظ ان المتجه $A = 2x + x^2$ يكون قاعدة الى V_2 وعليه فإن التكرار الهندسي للقيمة الذاتية $(\lambda = 2) = \dim V_2 = 1$. النظام الخطي الثاني يؤدي الى المعادلات

$$-a = o$$

$$a - 2b + 2c = o$$

$$-b + c = o$$

والحل بهذه الحالة يكون : $a = o, b = c$

اي ان .

$$V_1 = \{a + bx + cx^2 : a = o, b = c\}$$

$$= \{b x + bx^2 ; b \in R\}$$

من هنا نلاحظ ان المتجه $B = x + x^2$ يكون قاعدة الى V_1 .

بما ان تكرار $\lambda = 2$ الهندسي اصغر من تكرارها الجبري فنستخلص من ان T غير قابل للاقطار .

مثال (6) :

جد قاعدة الى R^3 بحيث تكون مصفوفة التحويل الخطي $T:R^3 \rightarrow R^3$ ، المعرف في المثال (3) من هذا البند مصفوفة قطرية .

الحل : لقد كانت مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية كالاتي :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}$$

وكانت $\lambda_1 = -1$ ، $\lambda_2 = 2$ ، $\lambda_3 = 5$.

على ضوء النتيجة (4.2.4) ، قاعدة R^3 التي تجعل من مصفوفة T بالنسبة لها قطرية يجب ان تكون مكونة من متجهات ذاتية الى T .

عليه يجب علينا ايجاد متجهات ذاتية تابعة للقيم الذاتية 5 ,2 ,1- .

عندما $\lambda = -1$ يجب حل النظام الخطي

$$(x,\ y,\ z) \begin{bmatrix} 0 & 6 & -12 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & -9 & 21 \end{bmatrix} = (0,0,0)$$

الذي يؤدي الى المعادلات :

$$2x - 6y - 3z = 0$$

$$-12x + 30y + 21z = 0$$

وهذا النظام من المعادلات يكافىء النظام

$$2x - 6y - 3z = 0$$

$$-6y + 3z = 0$$

حل النظام اعلاه كالاتي :ـــ

$x = 3z , y = (1/2)z, z = z$

بهذا يمكننا اخذ المتجه $A = (6, 1, 2)$ كمتجه ذاتي تابع للقيم الذاتية $\lambda = -1$.

وبالطريقة نفسها يكون المتجه $B = (0, -3, 5)$ متجهاً ذاتياً تابعاً للقيمة الذاتية $\lambda = 2$. والمتجه $C = (0, -1, 2)$ متجه ذاتي تابع للقيمة الذاتية $\lambda = 5$.

الان بالنسبة للقاعدة

$\{A_1 = (6, 1, 2), A_2 = (0, -3, 5) , A_3 = (0, -1, 2)\}$ تكون مصفوفة T قطرية وكالاتي .

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ملاحظـــة :

ان خلاصة ماتوصلنا اليه من خلال المبرهنات والامثلة تكون كما يلي : اذا كان لدينا تحويلاً خطياً $T:V \rightarrow V$ واردنا معرفة ان كانت هنالك قاعدة الى V بحيث تكون مصفوفة T بالنسبة لها قطرية . يجب علينا اتباع الخطوات التالية :

اولاً : نحسب مصفوفة T بالنسبة لاي قاعدة والافضل حسابها بالنسبة للقاعدة الطبيعية وذلك للسهولة والسرعة . لتكن تلك المصفوفة M .

ثانياً : نحسب متعددة الحدود المميزة $\Delta_1(t)$ وذلك بفك المحددة $\det (M - tI)$ ثم نحللها الى عواملها الاولية . ونلاحظ الحالتين التاليتيين :ـــ

الحالة (أ) : عدد جذور المعادلة المميزة بحساب التكرار كذلك ، لا يساوي بعد الفضاء V . (هذا يكافيء عدم تحلل المعادلة المميزة الى حاصل ضرب

عوامل خطية) عندئذ نقول بأن T غير قابل للاقطار اي انه لاتوجد قاعدة الى V تجعل من مصفوفة T قطرية .

الحالة (ب): عدد جذور المعادلة المميزة بحساب التكرار كذلك، يساوي بعد الفضاء V . (هذا يكافيء تحلل المعادلة المميزة الى حاصل ضرب عوامل خطية).

عندئذ يكون هنالك املاً بأن يكون T قابلاً للاقطار وهذا الامل يعتمد على المتجهات الذاتية وهي خطوة جديدة .

ثالثاً :

(أ) ان كان المطلوب فقط معرفة قابلية T للاقطار فنحسب بعد الفضاء الذاتي (الذي يساوي التكرار الهندسي) للقيم الذاتية المكررة اكثر من مرة ، اي نحسب التكرار الهندسي لكل قيمة ذاتية تكرارها الجبري اكبر من واحد وهنا يكون لدينا حالتان :

(أ) $_1$: عند وجود قيمة ذاتية تكرارها الهندسي اصغر من تكرارها الجبري فنقول بأن T غير قابل للاقطار .

(أ) $_2$: بخلافه يكون T قابلاً للاقطار .

(ب) في حالة كون T قابلاً للاقطار والمطلوب ايجاد قاعدة للفضاء V تجعل من مصفوفة T قطرية فيجب حساب كل المتجهات الذاتية وسوف تكون القاعدة المطلوبة .

(ج) تكون العناصر القطرية عبارة عن القيم الذاتية للتحويل T وترتيبها يرتبط بترتيب المتجهات الذاتية في القاعدة .

سنختم بندنا هذا بمجموعة من الامثلة المتنوعة .

مثال (7) :

اذا كان $T:V \rightarrow V$ تحويلاً خطياً ، بحيث $T^2 = ToT = I$ اي ان T^2 يساوي التحويل المحايد فبرهن على ان $\lambda = 1, \lambda = -1$ هي القيم الذاتية الوحيدة لـ T .

الحل: افرض بأن λ قيمة ذاتية و A متجه ذاتي تابع لها. اذن $T(A) = \lambda A$
من هذه المعادلة ينتج

$$A = I(A) = T^2(A) = T(\lambda A) = \lambda T(A) = \lambda^2 A$$

اذن
$$(1- \lambda^2)A = O$$

وبما ان A متجه ذاتي فإن $A \neq O$ وعليه يكون $1 - \lambda^2 = O$ ومن هذه المعادلة نستنتج على ان $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ هي القيم الذاتية الوحيدة.

مثال (8):

افرض بأن λ قيمة ذاتية للتحويل الخطي $T:V \rightarrow V$ وان A متجه ذاتي لها. برهن على ان λ^n تكون قيمة ذاتية للتحويل $T^n = ToTo....oT$ وان A يكون متجهاً ذاتياً تابعاً لها وذلك لاي عدد صحيح موجب n.

الحل: عندنا
$$T(A) = \lambda A$$

بأخذ T لطرفي المعادلة اعلاه وملاحظة ان T تحويل خطي، نحصل على
$$T^2(A) = T(T(A)) = \quad T(\lambda A) = \quad \lambda T(A)$$

وبالتعويض نحصل على
$$T^2(A) = \lambda (\lambda A) = \lambda^2 A$$

هذا يعني ان المتجه A يكون متجهاً ذاتياً للتحويل الخطي T^2 تابعاً للقيمة الذاتية λ^2. وبالاستقراء الرياضي نحصل على النتيجة المطلوبة.

مثال (9):

جد تحويلاً خطياً $T:R^2 \rightarrow R^2$ يمتلك قيمة ذاتية $\lambda = 1$ ومتجهاً ذاتياً $A = (1, -1)$ وقيمة ذاتية اخرى $\lambda = o$ ومتجهاً ذاتياً $B = (2,3)$.

الحل: من تعريف القيم والمتجهات الذاتية ينتج

$$T(A) = T(1,-1) = 1.(1,-1) = (1, -1)$$

$$T(B) = T(2,3) = 0(2,3) = (0,0)$$

المطلوب ايجاد $T(x,y)$. لهذا الغرض نكتب

$$(x,y) = a(1,-1) + b(2,3)$$

ينتج

$$(x,y) = (a + 2b, -a + 3b)$$

هذا يؤدي الى المعادلتين :

$$a + 2b = x$$

$$-a + 3b = y$$

والحل يكون :

$$a = (1/5)(3x - 2y),\ b = (1/5)(x + y)$$

اذن :

$$T(x,y) = aT(1,-1) + bT(2,3)$$
$$= (1/5)(3x - 2y)(1,-1) + (1/5)(x + y)(0,0)$$
$$= (1/5)(3x - 2y, 2y - 3x)$$

مثال (10) :

ليكن $T: P_1(C) \rightarrow P_1(C)$ التحويل الخطي المعرف بالصيغة :

$$T(a + bx) = 2a + (5a - b)x$$

جد قاعدة للفضاء $P_1(C)$ بالنسبة اليها تكون مصفوفة T قطرية .

الحل : نتبع الارشادات التي وردت سابقاً ونجد مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية $\{1, x\}$. هذه المصفوفة تحسب كما في الامثلة السابقة .

$$T(1) = 2 + 5x$$

$$T(x) = -x$$

عليه تكون مصفوفة T بالنسبة للقاعدة الطبيعية كما يلي

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية ستكون $\lambda = 2$, $\lambda = -1$. القاعدة المطلوبة ستكون مؤلفة من المتجهات الذاتية . هنالك متجه $3 + 5x$ تابع للقيمة الذاتية $\lambda = 2$ ومتجه x تابع للقيمة الذاتية $\lambda = -1$. بالنسبة للقاعدة $\{A_1 = 3 + 5x, A_2 = x\}$ تكون مصفوفة T قطرية بالصيغة $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. اما بالنسبة للقاعدة $A_1 = x, A_2 = 3 + 5x$ تكون مصفوفة T قطرية بالصيغة $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، (لاحظ الترتيب !) .

تمارين (4.2)

1 ــ اوجد القيم الذاتية وقواعد للفضاءات الذاتية لكل من التحويلات الخطية التالية :

(أ) $T:R^2 \to R^2$ ، $T(x,y) = (y, 2x)$.

(ب) $T:R^3 \to R^3$ ، $T(x,y,z) = (3x-z, y-x+2z, 4z)$.

(ج) $T:R^4 \to R^4$ ، $T(x, y, z, w) = (x+y, y, 2z, y+2z+2w)$

(د) $T: P_2(R) \to P_2(R)$ ، $T(P(x)) = x. d/dx (P(x))$.

(هـ) $T: P_2(C) \to P_2(C)$ ، $T(P(x)) = d/dx (x p (x))$.

(اعتبر $P_2(C)$ فضاءاً على الحقل C) .

2 ــ قرر فيما اذا كان كل تحويل في التمرين (1) قابلاً للاقطار .

3 ــ قرر فيما اذا كانت التحويلات التالية قابلة للاقطار .

(أ) $T:R^3 \to R^3$ ، $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$.

(ب) $T:R^3 \to R^3$ ، $T(x, y, z) = (x - 2z, o, -2x + 4z)$.

(ج) $T:R^3 \to R^3$ ، $T(x, y, z) = (o, x, y)$.

(د) $T:R^3 \to R^3$ ، $T(x, y, z) = (-x, -z, y)$.

(هـ) $T:C^3 \to C^3$ ، $T(u, v, w) = (-u, -w, v)$.

(اعتبر C^3 فضاءاً على الحقل C)

(و) $T:R^4 \to R^4$ ،

$T(x, y, z, w) = (x, 2x + 5y + 6z + 7w, 3x + 8z + 9w, 4x + 10w)$

4 ــ جد قاعدة لمجال كل تحويل خطي قابل للاقطار في تمرين (3) تجعل من مصفوفة ذلك التحويل بالنسبة لها قطرية .

5 ــ اذا كان $T:V \rightarrow V$ تحويلاً خطياً ، بحيث $T = T^2$. بين ان T يكون قابلاً للاقطار .

6 ــ اذا كان $T:V \rightarrow V$ تحويلاً خطياً غير معتلاً وقابلاً للاقطار فبرهن على ان $T^{-1}:V \rightarrow V$ يكون ايضاً قابلاً للاقطار .

(4.3) المصفوفات المتشابهة Similar Matricies

لقد ناقشنا في البند السابق مسألة وجود قاعدة للفضاء V بالنسبة اليها تكون مصفوفة التحويل الخطي $T:V \rightarrow V$ مصفوفة قطرية . فإذا كانت مصفوفة التحويل T بالنسبة لقاعدة معينة هي M فإن المسألة اعلاه تكافىء السؤال عن وجود تغيير للقاعدة بحيث تكون المصفوفة الجديدة قطرية . من المبرهنة (2.5.2) ، المصفوفة الجديدة للتحويل T ستكون PMP^{-1} بحيث ان P هي مصفوفة قابلة للقلب . هذا يؤدي بنا الى الصياغة التالية بالمصفوفات للمسألة اعلاه .

مسألة: اذا اعطينا مصفوفة مربعة M ، فهل توجد مصفوفة قابلة للقلب P بحيث تكون PMP^{-1} قطرية ؟ .

هذا يوحي بالتعريف التالي :

تعريف :

اذا كانت M, N مصفوفتين مربعتين من الدرجة نفسها فنقول بأن M تشابه N اذا وفقط اذا وجدت مصفوفة P قابلة للقلب بحيث ان $N = PMP^{-1}$.

انه لمن السهل البرهنة على المبرهنة التالية .

مبرهنة (4.3.1) :

علاقة تشابه المصفوفات تكون علاقة تكافؤ اي ان M تشابه M لاي مصفوفة M واذا كانت M تشابه N فإن N تشابه M واذا كانت M تشابه N و N تشابه Q فإن M تشابه Q .

ويمكن طرح المسألة اعلاه بلغة جديدة .

مسألة : اذا اعطينا مصفوفة مربعة M فمتى تكون مشابهة الى مصفوفة قطرية .

سنكون بحاجة لهذه المسألة في الفصل السادس ، ولغرض حل المسألة اعلاه سنقدم التعاريف التالية .

تعريف :

اذا كانت M مصفوفة $n \times n$ عناصرها مأخوذة من حقل F فإن العدد القياسي $r \in F$ يسمى قيمة ذاتية للمصفوفة M اذا وفقط اذا وجد متجهاً $X = (x_1, \ldots, x_n)$ في F^n غير صفري ويحقق $XM = rX$.

بهذه الحالة نقول بأن المتجه X متجه ذاتي تابع للقيمة الذاتية r .

لاحظنا في البند السابق ان القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للتحويلات الخطية كانت تستخرج من مصفوفة التحويل الخطي وعليه يمكن ان نعرف ونستخرج مايلي :

1 ـــ المعادلة المميزة لاي مصفوفة مربعة M تكون $|M - tI| = 0$.
2 ـــ القيم الذاتية للمصفوفة المربعة تكون جذور المعادلة المميزة .
3 ـــ المصفوفات المتشابهة لها متعددة الحدود المميزة نفسها .

الاجابة على المسألة المطروحة في بداية بندنا هذا تكمن في المبرهنة التالية :

مبرهنـــة (4.3.2) :

المصفوفة المربعة M ذات الدرجة $n \times n$ تكون مشابهة لمصفوفة قطرية اذا وفقط اذا امتلكت n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً .

البرهان :

افرض ان M تشابه المصفوفة القطرية

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & O \\ O & d_2 \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

بهذه الحالة وحسب تعريف التشابه فإنه توجد مصفوفة قابلة للقلبْ P بحيث

$$PMP^{-1} = D$$

وهذا يعني ان $PM = DP$.

الان افرض ان P_k هو الصف k في المصفوفة P ، بذلك يمكن رؤية المصفوفة P كالاتي :

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

عليه يكون :

$$PM = \begin{pmatrix} P_1M \\ \\ P_nM \end{pmatrix} , \quad DP = \begin{pmatrix} d_1 P_1 \\ \\ d_nP_n \end{pmatrix}$$

وبما ان $PM = DP$ فنستنتج من ان :

$$P_1M = d_1P_1,\ P_2M = d_2P_2,\ \ldots,\ P_nM = d_nP_n$$

عندئذ يكون كل من $P_1, \ldots, P_n$ متجهاً ذاتياً للمصفوفة M تابعاً للقيمة الذاتية $d_1, \ldots, d_n$ على التوالي .

بما ان P مصفوفة قابلة للقلب فإن صفوفها تكون مستقلة خطياً اي ان المتجهات الذاتية $P_1, \ldots, P_n$ تكون مستقلة خطياً .

على العكس، لو افترضنا وجود n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً للمصفوفة M ولتكن: $X_1, \ldots, X_n$ تابعة للقيم الذاتية: $r_1, \ldots, r_n$ على التوالي، فنضع

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_n \end{bmatrix} \quad , D = \begin{bmatrix} r_1 & & O \\ & r_2 & \\ O & & \ddots \; r_n \end{bmatrix}$$

بذلك تتكون لدينا مصفوفة مربعة X ذات درجة $n \times n$ وتكون هذه المصفوفة قابلة للقلب وذلك للاستقلال الخطي لصفوفها.

الان يمكن التحقيق بسهولة على أن $XM = DX$ اي ان

$$XMX^{-1} = D$$

اذن M تكون مشابهة لمصفوفة قطرية D.

(و . هـ . م)

مثال (1):

جد ان امكن مصفوفات قطرية مشابهة لكل من المصفوفات التالية:

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix} , \quad M_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 17 & -10 & -5 \\ 45 & -28 & -15 \\ -30 & 20 & 12 \end{bmatrix} , \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل: (1) المعادلة المميزة للمصفوفة M_1 تكون :

$$\begin{bmatrix} -1-t & 6 & -12 \\ 0 & -13-t & 30 \\ 0 & -9 & 20-t \end{bmatrix} = o$$

وبفتح المحدد اعلاه تنتج المعادلة $(t+1)(t-2)(t-5) = o$.

وبذلك تكون القيم الذاتية للمصفوفة M_1 كالاتي :

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$

بما ان هذه القيم الذاتية مختلفة فنستنتج على ان المتجهات الذاتية التابعة لها تكون مستقلة خطياً وبذلك تكون المصفوفة M_1 مشابهة الى المصفوفة القطرية :

$$D = \begin{bmatrix} -1 & & O \\ & 2 & \\ O & & 5 \end{bmatrix}$$

القارىء يجب ان يحقق على ان المتجهات :

$A_1 = (1, -1, 2), A_2 = (0, 3, -5), A_3 = (0, 0, 2)$

تكون متجهات ذاتية تابعة للقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ على التوالي وعليه اذا وضعنا :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فإنه بالامكان التحقق من ان : $PM_1P^{-1} = D$.

2 ــ نناقش الان المعادلة المميزة للمصفوفة M_2 .

$$\begin{vmatrix} 2-t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = 0$$

اي ان : $(3 - t)(t - 1)^2 = o$

القيم الذاتية للمصفوفة M_2 تكون : $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

لغرض حساب المتجهات الذاتية التابعة للقيمة الذاتية 1 علينا ايجاد حل للمعادلة :

$$(x, y, z) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = (0,0,0)$$

وهذه تؤدي الى :

$x + y = o$

$2z = o$

والحل يكون : $x = -y, y = y, z = o$

وبهذا نحصل على متجه ذاتي مثل (0 ,1 ,1-) وجميع المتجهات الذاتية الاخرى تكون بالصيغة $r(-1, 1, 0)$ حيث r عدد حقيقي . عليه سوف يوجد متجهان ذاتيان مستقلان خطياً احدهما يتبع القيمة الذاتية $\lambda_2 = 1$ والاخر يتبع القيمة الذاتيه $\lambda_1 = 3$ وبالتالي وحسب المبرهنة (4.3.2) فإن المصفوفة M_2 لاتكون مشابهة لمصفوفة قطرية .

(3) المعادلة المميزة للمصفوفة M_3 تكون :

$(t + 3)(t - 2)^2 = o$

عليه يكون للمصفوفة M_3 قيمتان ذاتيتان هما $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$

لغرض حساب المتجهات الذاتية التابعة للقيمة الذاتية 2 ، علينا ايجاد حل للمعادلة :

$$(x, y, z)\begin{bmatrix} 15 & -10 & -5 \\ 45 & -30 & -15 \\ -30 & 20 & 10 \end{bmatrix} = (0,0,0)$$

وهذه تؤدي الى : $x + 3y - 2z = 0$

اما بقية المعادلات فتكون معتمدة على المعادلة اعلاه .

عليه يكون الحل كالاتي :

$x = 2z - 3y, y = y, z = z$

بذلك يمكن الحصول على متجهين ذاتيين مستقلين خطياً مثل :

$A_1 = (-3, 1, 0)$, $A_2 = (2, 0, 1)$

وبالطريقة نفسها نحصل على المتجه $A_3 = (-3, 2, 1)$ كمتجه ذاتي تابع للقيمة الذاتية $\lambda_1 = -3$.

اذا وضعنا :

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & & O \\ & 2 & \\ O & & -3 \end{bmatrix}$$

فإنه بالامكان التحقق من ان :

$PM_3P^{-1} = D$

عليه فإن M_3 تشابه مصفوفة قطرية .

(4) المعادلة المميزة للمصفوفة M_4 تكون : $t^2 + 4 = o$.

بما انه لايوجد حل للمعادلة اعلاه على حقل الاعداد الحقيقية فإنه لاتوجد قيم ذاتية للمصفوفة M_4 وذلك على حقل الاعداد الحقيقية ، اي انه لايمكن للمصفوفة M_4 ان تكون مشابهة لمصفوفة قطرية ذات عناصر قطرية حقيقية .

اذا اردنا استخدام اعداد عقدية فإنه توجد قيمتان ذاتيتان هما $\lambda_1 = 2i$ ، $\lambda_2 = -2i$ وبالتالي يتبعهما متجهان ذاتيان مستقلان خطياً وعليه تكون المصفوفة

M_4 مشابه للمصفوفة القطرية $D = \begin{bmatrix} -2i & O \\ O & 2i \end{bmatrix}$. القارىء مدعو الآن لايجاد المصفوفة P التي تحقق $PM_4P^{-1} = D$.

مثال (2) :

برهن على ان المصفوفتين M و N متشابهتان ، حيث

$$M = \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 14 & -9 \end{bmatrix} , \quad N = \begin{bmatrix} -2 & O \\ -14 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل : يجب علينا ايجاد مصفوفة P تحقق $PMP^{-1} = N$ ، وهذا حله صعب بالطريقة المباشرة . لذلك نحاول ان نستخدم القيم الذاتية والمتجهات الذاتية .

المعادلة المميزة الى M تكون : $(t - 5)(t + 2) = o$

وعليه فإنه يوجد متجهان ذاتيان مستقلان خطياً للمصفوفة M . اذن تكون M مشابهة لمصفوفة قطرية D_1 ، اي انه توجد مصفوفة P_1 تحقق $P_1MP_1^{-1} = D_1$

المعادلة المميزة الى N تكون : $(-2-t)(5-t) = (t-5)(t-2-) = o$ وبالطريقة نفسها فإنه توجد مصفوفة P_2 تحقق $P_2NP_2^{-1} = D_2$ حيث ان D_2 مصفوفة قطرية .

الآن نلاحظ ان العناصر القطرية لكل من المصفوفتين D_1 ، D_2 عبارة عن القيم الذاتية للمصفوفتين M و N على التوالي .

عليه يكون :

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

وذلك لان القيم الذاتية للمصفوفة M تكون القيم الذاتية نفسها للمصفوفة N .

اذن $P_1MP_1^{-1} = P_2NP_2^{-1}$

وعليه يكون $(P_2^{-1}P_1)\,M\,(P_1^{-1}P_2) = N$

وبوضع $P = P_1^{-1}P_2$ نحصل على $PMP^{-1} = N$ وعليه تكون M مشابهة الى N .

ملاحظة :

اذا طلب منا ايجاد P فيتوجب علينا ايجاد كل من P_1 ، P_2 وذلك حسب الطريقة في المثال (1) .

تمارين (4.3)

1 ــ جد مصفوفات قطرية مشابهة للمصفوفات التالية :

(أ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

2 ــ اوجد لكل من المصفوفات التالية كل القيم الذاتية والمتجهات الذاتية .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3 ــ اوجد مصفوفات قابلة للقلب P_1, P_2, P_3 بحيث تكون كل من $P_3CP_3^{-1}$ و $P_2BP_2^{-1}$ و $P_1AP_1^{-1}$ مصفوفة قطرية . حيث ان A, B, C هي مصفوفات تمرين 2 .

4 ــ كرر المطلوب في التمرينين 3,2 على المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5 ــ جد القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وذلك على حقل الاعداد العقدية .

6 ــ قرر فيما اذا كانت كل من المصفوفات التالية مشابهة الى مصفوفة قطرية وذلك على حقل الاعداد الحقيقية .

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

7 ــ اذا كان $a \neq 0$ عدداً عقدياً فبرهن على ان المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ لاتشابه مصفوفة قطرية .

8 ــ اذا كانت A مصفوفة مربعة و A^T مدورة المصفوفة A فبرهن على ان A, A^T لهما متعددة الحدود المميزة نفسها .

9 ــ برهن على ان للمصفوفتين A, A^T قيمتان ذاتيتان متساويتان . اورد مثالاً تبين منه ان للمصفوفتين A, A^T متجهان ذاتيان مختلفان .

10 ــ اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -25 & -36 \\ 18 & 26 \end{bmatrix} ،$$

فجد مصفوفة H تحقق HAH^{-1} تكون قطرية ، ثم جد A^{12} .

11 ــ برهن على ان المصفوفتين A, B متشابهتان ، حيث :

$$B = \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 14 & -9 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -14 & 0 \end{bmatrix} .$$

12 ــ اذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ على حقل الاعداد الحقيقية واذا كانت λ قيمة ذاتية الى A فبرهن على ان λ^k تكون قيمة ذاتية الى A^k ، وذلك لاي عدد صحيح موجب k . استنتج من ذلك ان $P(\lambda)$ تكون قيمة ذاتية الى $P(A)$ ، حيث P متعددة حدود معاملاتها اعداد حقيقية .

13 ــ جد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

وحقق مباشرة ان القيم الذاتية للمصفوفة A^2 تكون مربعات القيم الذاتية للمصفوفة A .

14 ــ جد القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة

$$M = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 2-2i & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

على حقل الاعداد العقدية C ثم قرر فيما اذا كانت مشابهة لمصفوفة قطرية .

15 ــ اذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ قابلة للقلب ومتعددة حدودها المميزة

$$|A - tI| = (-1)^n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \ldots + b_1 t + b_o$$

فبرهن على ان متعددة الحدود المميزة للمصفوفة A^{-1} تكون

$$(-1)^n [t^n + (b_1 / |A|) t^{n-1} + \ldots . + (b_{n-1} / |A|) t + (-1)^n / |A|] .$$

(4.4) مبرهنة كيلي ــ هاملتون وتطبيقاتها

(Cayley - Hamilton Theorem)

نخصص هذا البند لبرهنة نتيجة هامة في موضوع الجبر الخطي لها تطبيقات كثيرة في الاحصاء وبقية فروع الرياضيات وهي مبرهنة كيلي ــ هاملتون • هذه المبرهنة تنص على ان اي مصفوفة مربعة تحقق معادلتها المميزة ولتوضيح ذلك نفرض ان المعادلة المميزة للمصفوفة المربعة M ذات الدرجة $n \times n$ تكون :ــ

$$t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \ldots.. + a_{n-1}t + a_n = o$$

الناتجة من فتح المحدد في المعادلة $|M - tI| = o$

ان مبرهنة كيلي هاملتون تنص على ان

$$M^n + a_1M^{n-1} + \ldots. + a_{n-1}M + a_nI = O \ldots.(\star)$$

حيث ان O في الطرف الايمن للمعادلة $(\star)$ يمثل المصفوفة الصفرية $n \times n$.

مبرهنة (4.4.1) (كيلي ــ هاملتون)

اي مصفوفة مربعة تحقق معادلتها المميزة .

البرهان :

لتكن M مصفوفة مربعة $n \times n$ عناصرها من الحقل F ومعادلتها المميزة

$$t^n + a_1t^{n-1} + \ldots. + a_{n-1}t + a_n = o$$

لتكن :
$$N = Adj\,(M - tI)$$

ان العنصر N_{ij} عبارة عن المحدد الناتج من حذف الصف j والعمود i في المصفوفة $M - tI$ وهذا المحدد مضروب في $(-1)^{i+j}$.

بذلك تكون عناصر N عبارة عن متعددات حدود في t ذات درجة لا تتعدى $n-1$. بذلك يمكننا ان نكتب N بالصيغة

$$N = t^{n-1} N_{n-1} + t^{n-2} N_{n-2} + \dots + tN_1 + N_o$$

حيث ان : $N_o, N_1, \dots, N_{n-1}$ مصفوفات مربعة $n \times n$ عناصرها ثابتة من الحقل F.

ان المصفوفة N تحقق مايلي :

$$(M - tI) N = \det (M - tI). I$$

والمعادلة اعلاه يمكن التحقق منها من تعريف N ومن خصائص المحددات في معظم كتب التفاضل والتكامل.

بهذا يكون لدينا المعادلة التالية :

$$(M - tI) (t^{n-1}N_{n-1} + t^{n-2}N_{n-2} + \dots + tN_1 + N_o) = (t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_{n-1}t + a_n)I$$

بمقارنة معاملات t^k في طرفي المعادلة اعلاه وذلك لكل $n \leq k \leq o$.

نحصل على

$$-N_{n-1} = I$$

$$-N_{n-2} + MN_{n-1} = a_1I$$

$$-N_{n-3} + MN_{n-2} = a_2I$$

$$\vdots$$

$$MN_o = a_nI$$

بضرب هذه المعادلات في $I, M, \dots, M^{n-1}, M^n$ على التوالي وجمعها ينتج مايلي :

$$M^n + a_1M^{n-1} + \dots + a_{n-1}M + a_nI = O$$

(و . هـ . م)

نورد الان تطبيقين للمبرهنة اعلاه .

التطبيق (1) : حساب معكوس مصفوفة مربعة .

افرض ان M مصفوفة مربعة قابلة للقلب . بهذه الحالة تكون المعادلة المميزة الى M بالصيغة

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n = 0$$

بحيث ان $a_n \neq 0$. فلو كان $a_n = 0$ لكان $t = 0$ احد جذور المعادلة المميزة وبالتالي يكون قيمة ذاتية للمصفوفة M . لكن المعادلة المميزة جاءت من المعادلة

$$\det (M - tI) = 0$$

$t = 0$ تحقق المعادلة اعلاه تنتج، $\det M = 0$ وعليه لاتكون M قابلة للقلب اذن $a_n \neq 0$.تطبيق مبرهنة كيلي ـــ هاملتون ينتج

$$M^n + a_1 M^{n-1} + \dots + a_{n-1} M + a_n I = O$$

بما ان $a_n \neq 0$. اذن

$$I = (-1/a_n)(M^n + a_1 M^{n-1} + \dots + a_{n-1} M)$$

بضرب طرفي المعادلة اعلاه في M^{-1} نحصل على :

$$M^{-1} = (-1/a_n)(M^{n-1} + a_1 M^{n-2} + \dots + a_{n-1} I)$$

مثال (1) :

بتطبيق مبرهنة كيلي هاملتون ، جد M^{-1} اذا علمت بأن :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}$$

الحل : المعادلة المميزة الى M تكون كما يلي :

$$t^3 - 6t^2 + 3t + 10 = 0$$

مبرهنة كيلي ـــ هاملتون تنص على ان M تحقق المعادلة اعلاه ، اي

$$M^3 - 6M^2 + 3M + 10I = O$$

اذن :

$$M^{-1} = (-1/10)(M^2 - 6M + 3I)$$

الآن :

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 24 & -48 \\ 0 & -101 & 210 \\ 0 & -63 & 130 \end{bmatrix}$$

عليه يكون

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 6/5 & -12/5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 9/10 & -13/10 \end{bmatrix}$$

التطبيق (2) :

التعبير عن $M^k (k \geq n)$ بدلالة $M^i (i \leq n)$

يمكن التعبير عن $M^k (k \geq n)$ كمتعددة حدود في M ذات درجة غير متعدية الى $n - 1$ وذلك على النحو التالي :

M تحقق معادلتها المميزة ، اي ان

$$M^n + a_1 M^{n-1} + \ldots + a_{n-1} M + a_n I = O$$

عندما $k \geqq n$ ، نضرب المعادلة اعلاه في M^{k-n} فنحصل على :

$$M^k + a_1 M^{k-1} + \ldots + a_{n-1} M^{k-n+1} + a_n M^{k-n} = O$$

هذا يعني انه بالامكان كتابة M^k كمتعددة حدود بدرجة اقل او تساوي $k-1$. وبتطبيق ذلك عدة مرات نتوصل الى ان M^k يمكن كتابته كمتعددة حدود بدرجة لاتتعتدى $n-1$ وكما موضح في المثال التالي .

مثال (2) :

جد M^7 اذا علمت بأن

$$M = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل : المعادلة المميزة الى M تكون :

$$t^2 - t - 2 = 0$$

بتطبيق مبرهنة كيلي ــ هاملتون نحصل على

$$M^2 - M - 2I = O$$

اذن $M^2 = M + 2I$ وعليه يكون $M^3 = M^2 + 2M$ وبالتعويض عن M^2 نحصل على $M^3 = (M + 2I) + 2M$ اي $M^3 = 3M + 2I$ وهكذا نحصل على

$$M^7 = 21M^2 + 22M = 43M + 42I$$

$$= 43 \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + 42 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -130 & 258 \\ -129 & 257 \end{bmatrix}$$

يمكن اجراء عملية الحساب كالاتي : بضرب المعادلة $M^2 = M + 2I$ في M^5 نحصل :

$$M^7 = M^6 + 2M^5$$

$$= (M^5 + 2M^4) + 2M^5 = 3M^5 + 2M^4$$

$$= 3(M^4 + 2M^3) + 2M^4 = 5M^4 + 6M^3$$

$$= 5(M^3 + 2M^2) + 6M^3 = 11M^3 + 10M^2$$

$$= 11(M^2 + 2M) + 10M^2 = 21M^2 + 22M$$

$$= 21(M + 2I) + 22M = 43M + 42I$$

ان التطبيقين اعلاه يكونان مفيدان في حالة كون درجة M كبيرة وهذا يقلل من عدد الخطوات ومن زمن الحاسبة الالكترونية ان استخدمت .

تمارين (4.4)

1 ـــ جد المعادلــة المميـــزة للمصفوفـــة $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ ثم استخدم مبرهنة كيلي ـــ هاملتون لبرهنة ان $A^9 = 3^8 . A$.

2 ـــ اذا كانت $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $= A$ ، فجد المعادلة المميزة الى A ثم جد A^{-1} بإستخدام مبرهنة كيلي ـــ هاملتون .

3 ـــ اذا كانت $\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ $= A$ ، فجد المعادلة المميزة الى A ثم احسب A^{-1} و A^5 .

4 ـــ جد A^{-1} بأستخدام مبرهنة كيلي هاملتون .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

الفصل الخامس

الفضاءات الاقليدية

Euclidean Vector Spaces

(5.0) مقدمة

لقد تعرف الطالب في مواضيع التفاضل والتكامل والفيزياء وغيرها على الضرب الداخلي او الضرب النقطي (dot product) لمتجهين B,A في المستوى R^2 وفي الفراغ R^3 . ان لهذا الضرب اهمية كبيرة في معرفة الزوايا بين المتجهات ومعرفة خصائص هندسية كثيرة .

ان الضرب القياسي اعلاه كان معرفاً على النحو التالي

$$A.B = \|A\| \ \|B\| \ \cos\theta$$

حيث ان $\|A\|$ يمثل طول المتجه A و θ هي الزاوية بين المتجهين A و B . ان التعريف اعلاه يبدو معقولاً في الفضاءين R^2 و R^3 وذلك لان اطوال المتجهات تعرف بسهولة وكذلك فان الزوايا يمكن قياسها وذلك للوضوح الهندسي لهذين الفضاءين .

في الدراسة التجريدية للجبر الخطي، حيث نناقش فضاء المتجهات من خلال بديهيات معينة، تكون الطريقة اعلاه في تعريف الضرب الداخلي غير معقوله وذلك لاننا مثلاً نقول فضاء المصفوفات 2x2 فماذا يعني **عندئذٍ** طول مصفوفة او الزاوية بين مصفوفتين .

سيكون هدفنا في هذا الفصل مناقشة هذه المسألة، حيث نبدأ في البند (5.1) بتعريف الضرب الداخلي (Inner product)على فضاء المتجهات من خلال طرح مجموعة من البديهيات.

في البند (5.2) سندرس اطوال المتجهات والزاويا بين المتجهات في الفضاءات المعرَّف عليها ضرباً داخلياً. سنطلق اسم فضاء اقليدي على اي فضاء متجهات منتهي البعد وعلى حقل الاعداد الحقيقية ومعرَّف عليه ضرباً داخلياً. سنرى كيف ان ماسنطرحه بالشكل العام ينطبق على ماهو معروف عن الضرب الداخلي والطول في المستوي R^2 والفراغ R^3. سندرس في البند (5.3) تعامد المتجهات وكيفية ايجاد قاعدة متعامدة من المتجهات لفضاء اقليدي. البند الاخير خصص لدراسة الفضاءات المتممة العمودية.

(5-1) الفضاءات الاقليدية (Euclidean Vector Spaces).

ليكن V فضاء متجهات على حقل الاعداد الحقيقية.

تعريف :

بضرب داخلي (Inner product) على V نقصد دالة

$\langle\ ,\ \rangle : V\times V \to R$

تخصص لكل زوج من المتجهات A,B في V، عدداً حقيقياً يرمز له بالرمز $\langle A,B\rangle$ وهذا يحقق الخصائص التالية :

1 ــ $\langle A,B\rangle = \langle B,A\rangle$ وذلك لكل $A\in V$ ولكل $B\in V$.

2 ــ $\langle rA,B\rangle = r\langle A,B\rangle = \langle A,rB\rangle$ وذلك لكل $A\in V$ ولكل $B\in V$ ولكل عدد حقيقي $r\in R$.

3 ــ

(أ) $\langle A+B,C\rangle = \langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle$

(ب) $\langle A,B+C\rangle = \langle A,B\rangle + \langle A,C\rangle$

وذلك لكل $A,B,C\in V$

4 ـــ لكل متجه $A \in V$ يكون

(أ) $\langle A,A\rangle \geqq 0$

(ب) $\langle A,A\rangle = 0$ اذا وفقط اذا $A = O$.

بالامكان تعريف الضرب الداخلي على فضاء متجهات على حقل الاعداد العقدية لكن بطريقة تختلف عن الطريقة اعلاه لكننا سنركز اهتمامنا على الفضاءات المعرفة على حقل الاعداد الحقيقية .

لاحظ ان الضرب النقطي (dot product) المعرف على كل من R^2 و R^3 بالطريقة $A.B = \|A\| \, \|B\| \, \cos\theta$ ، يحقق جميع الخصائص الاربعة اعلاه وبالتالي نكون قد عممنا التعريف الى فضاءات ، متجهاتها تجريدية وربما لاتحمل تصور هندسي .

سنوضح فكرة الضرب الداخلي بالامثلة التالية :

مثال (1) :

الضرب الداخلي الاعتيادي على R^n .

اذا كان $A = (a_1,\ldots,a_n)$, $B = (b_1,\ldots,b_n)$ متجهان في R^n فنعرف :

$$\langle A,B\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

ان الدالة $\langle \, , \, \rangle : R^n x R^n \rightarrow R$ المعرفة اعلاه تكون ضرباً داخلياً على R^n ولغرض التحقق من ذلك يجب علينا فحص البديهيات الاربعة التي وردت في التعريف . الان بما ان ضرب الاعداد الحقيقية يكون ابدالياً فعليه ينتج

$$\langle A,B\rangle = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = b_1a_1 + \ldots + b_na_n = \langle B,A\rangle$$

وبهذا تكون البديهية (1) قد تحققت .

$$\begin{aligned}\langle rA,B\rangle &= (ra_1)b_1 + \ldots = (ra_n)b_n \\ &= r(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) = r\langle A,B\rangle \\ &= a_1(rb_1) + \ldots + a_n(rb_n) = \langle A,rB\rangle\end{aligned}$$

وبهذا تكون البديهية (2) قد تحققت ايضاً . لتحقيق البديهية (أ، 3) نجري الحسابات التالية :

$$\langle A+B,C \rangle = (a_1+b_1)c_1 + \dots + (a_n+b_n)c_n$$
$$= a_1c_1 + b_1c_1 + \dots + a_nc_n + b_nc_n$$
$$= a_1c_1 + \dots + a_nc_n + b_1c_1 + \dots + b_nc_n$$
$$= \langle A,C \rangle + \langle B,C \rangle$$

تحقيق (ب ، 3) يكون مماثلاً . اخيراً نلاحظ

$$\langle A,A \rangle = a^2_1 + a^2_2 + \dots + a^2_n$$

وبما ان حاصل جمع مربعات اعداد حقيقية يكون دائماً عدداً حقيقياً موجباً او صفراً ، ويكون مساوياً للصفر فقط في حالة كون جميع الحدود مساوية للصفر فعليه تكون البديهية (4) قد تحققت . بهذا يكون ⟨ و ⟩ ضرباً داخلياً على R^n .

ملاحظة :

إن الضرب الداخلي المعرف اعلاه ينطبق على تعريف الضرب النقطي (dot product) في حالة كون $n = 2$ او $n = 3$.

مثال (2) :

اذا كان $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ متجهين في R^2 فان

$$\langle A,B \rangle = 5a_1b_1 + 2a_2b_2$$

يعرف ضرباً داخلياً على R^2 . لاثبات ذلك ، لاحظ اولاً انه اذا أبدلنا في هذه المعادلة B,A فان الطرف الايمن يبقى كما هو . وعليه

$$\langle A,B \rangle = \langle B,A \rangle$$

اذا كان $C = (c_1, c_2)$ فان

$$\langle A+B,C \rangle = 5(a_1+b_1)c_1 + 2(a_2+b_2)c_2$$
$$= 5a_1c_1 + 5b_1c_1 + 2a_2c_2 + 2b_2c_2$$
$$= (5a_1c_1 + 2a_2c_2) + (5b_1c_1 + 2b_2c_2)$$
$$= \langle A,C \rangle + \langle B,C \rangle$$

وهذا يحقق البديهية (أ ، 3) وتحقيق (ب ، 3) يكون مماثلاً . وايضاً ، اذا كان r عدداً حقيقياً فإن

$$\langle rA,B\rangle = 5(ra_1)b_1 + 2(ra_2)b_2$$
$$= r(5a_1b_1 + 2a_2b_2) = r\langle A,B\rangle$$
$$= 5a_1(rb_1) + 2a_2(rb_2) = \langle A,rB\rangle$$

وهذا يحقق البديهية الثانية . واخيراً

$$\langle A,A\rangle = 5a^2_1 + 2a^2_2$$

واضح ان $\langle A,A\rangle \geqq 0$ وان $\langle A,A\rangle = 0$ اذا وفقط اذا كان $A = (a_1,a_2) = O$. لذلك فان البديهية الرابعة متحققة .

يختلف الضرب الداخلي في هذا المثال عن الضرب الداخلي الاعتيادي على R^2 في المثال الاول وهذا يبين ان فضاء المتجهات يمكن ان يكون له اكثر من ضرب داخلي واحد .

سنوضح الان كيفية وجود ضرب داخلي على فضاءات مثل فضاء متعددات الحدود وذات الدرجة التي لاتتعدى $P_n(R),n$. وفضاء المصفوفات $M_{mn}(R)$ ، وغيرها .

مثال (3) :

ضرب داخلي على $P_n(R)$.

اذا كانت

$$A(x) = a_o + a_1x + \ldots + a_nx^n$$
$$B(x) = b_o + b_1x + \ldots + b_nx^n$$

متعددتي حدود في الفضاء $P_n(R)$ فنعرف

$$\langle A(x), B(x)\rangle = \int_0^1 A(x).\ B(x)dx.$$

المعادلة اعلاه تعرف ضرباً داخلياً على $P_n(R)$. لاثبات ذلك ، لاحظ اولاً تحقق البديهية (1) بسهولة .
خصائص التكامل تنتج مايلي :

$$\langle rA(x),B(x)\rangle = \int_0^1 (rA(x))B(x)dx$$
$$= r\int_0^1 A(x)B(x)dx = r\langle A(x),B(x)\rangle$$
$$= \int_0^1 A(x)(rB(x)dx = \langle A(x),rB(x)\rangle$$

هذا يعني تحقق البديهية الثانية .

$$\langle A(x)+B(x),C(x)\rangle = \int_0^1 (A(x)+B(x))C(x)dx$$
$$= \int_0^1 (A(x)C(x)+B(x)C(x))dx$$
$$= \int_0^1 A(x)C(x)dx + \int_0^1 B(x)C(x)dx$$
$$= \langle A(x),C(x)\rangle + \langle B(x),C(x)\rangle$$

وهذا يعني تحقق البديهية الثالثة (أ) وتحقيق (ب ، 3) مماثل .

$$\langle A(x), A(x)\rangle = \int_0^1 (A(x))^2dx$$

الان $(A(x))^2$ دالة موجبة او صفر ومن مبرهنات التفاضل والتكامل نستنتج من ان

$$\int_0^1 (A(x))^2dx \geqslant o$$

وان $\int_0^1 (A(x))^2dx = o$ اذا وفقط اذا $A(x) = o$ لجميع قيم $x \in [o,1]$. لكن المعادلة $A(x) = o$ تنتج على الاكثر n من الجذور وبما ان $A(x) = o$ لجميع قيم $x \in [0,1]$ (اي مالانهاية من الجذور) . اذن يجب على متعددة الحدود $A(x)$ ان تكون متعددة الحدود الصفرية (جميع معاملاتها تساوي صفر) .
وهذا يعني تحقق البديهية الرابعة .

مثال (4)

اذا كانت

$A(x) = 2-x$

$B(x) = x + 3x^2$

فجد $\langle A(x),B(x)\rangle$ ، كما معرف في المثال (3)

الحل

$$\langle A(x),B(x)\rangle = \int_0^1 A(x)B(x)dx$$
$$= \int_0^1 (2-x)(x+3x^2)dx$$
$$= \int_0^1 (-3x^3+5x^2+2x)dx$$
$$= 23/12$$

مثال (5) :

الضرب الداخلي الاعتيادي على فضاء المصفوفات $M_{mn}(R)$.

نذكر القاريء بان الفضاء $M_{mn}(R)$ هو فضاء المصفوفات ذات الدرجة mxn . اذا كانت $B=(b_{ij}), A=(a_{ij})$ مصفوفتين فان المعادلة :

$$\langle A,B\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}b_{ij}$$

تعرف ضرباً داخلياً على $M_{mn}(R)$ والتحقيق مشابه للامثلة السابقة .

مثال (6) :

اذا كانت

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

مصفوفتين في $M_{23}(B)$ فجد $\langle A,B \rangle$ كما معرف في المثال (5) .

الحل :

$$A,B \quad = (1)(0) + (0)(2) + (-1)(5) + (0)(1) + (2)(2) + (3)(-2)$$
$$= -7$$

مثالنا الاخير يوضح طريقة عامة وبسيطة لتعريف ضرب داخلي على اي فضاء متجهات منتهي البعد .

مثال (7) :

الضرب الداخلي الناشيء من الاحداثيات .

لنفرض ان V فضاء متجهات على حقل الاعداد الحقيقية R ، منتهي البعد وبعده يساوي n . افرض ان $G = \{A_1, \ldots, A_n\}$ تكون قاعدة الى V . اذن لاي متجهين B,A في V توجد اعداد قياسية وحيدة : $x_1, \ldots, x_n$ و $y_1, \ldots, y_n$ تحقق :

$$A = x_1A_1 = \ldots + x_nA_n$$
$$B = y_1A_1 + \ldots + y_nA_n$$

نعرف :

$$\langle A,B \rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

يمكن التحقق بسهولة من ان التعريف اعلاه يمثل ضرباً داخلياً على V ونترك الاثبات للطالب . لاحظ بان الضرب الداخلي اعلاه يعتمد على القاعدة المختارة فمثلاً لو اخترنا القاعدة الطبيعية للفضاء R^2 لحصلنا على الضرب الداخلي الاعتيادي اما اذا اخترنا القاعدة المكونة من المتجهين $A_1 = (1,0)$ ، $A_2 = (1,1)$ لحصلنا على

$$\langle A,B \rangle = a_1b_1 - a_1b_2 - b_1a_2 + 2a_2b_2$$

وذلك لاي متجهين $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$

وللتحقق من ذلك نلاحظ :

$$A = (a_1, a_2) = (a_1 - a_2)(1,0) + a_2(1,1)$$
$$B = (b_1, b_2) = (b_1 - b_2)(1,0) + b_2(1,1)$$

وعليه يكون $\langle A,B \rangle$ كما في التعريف كلاتي

$$\langle A,B \rangle = (a_1-a_2)(b_1-b_2) + a_2b_2$$
$$= a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1 + 2a_2b_2$$

لقد سمى الضرب الداخلي اعلاه بالضرب الناشيء من الاحداثيات لانه يعتمد على احداثيات المتجهات بالنسبة لقاعدة معينة.

نعتقد باننا اوردنا عدداً لابأس به من الأمثلة ونرجع الان لطرح مفاهيم اخرى.

تعريف :

بفضاء متجهات اقليدي (Euclidean Vector Space) نقصد فضاء متجهات V على حقل الاعداد الحقيقية ومنتهي البعد، بمعية ضرب داخلي $\langle \,,\, \rangle$ معرف عليه. ونرمز له بالرمز $(V, \langle \,,\, \rangle)$

مثال (8) :

اذا كان $\langle \,,\, \rangle_1$ هو الضرب الداخلي الاعتيادي على R^2 و $\langle \,,\, \rangle_2$ هو الضرب الداخلي المعرف في المثال (2) فان كل من $(R^2, \langle \,,\, \rangle_1)$ و $(R^2, \langle \,,\, \rangle_2)$ يكون فضاءاً اقليدياً لكنهما غير متساويين كفضاءين اقليدين وذلك لاختلاف الضرب الداخلي على كل منهما.
نذكر الان متباينة مهمة تسمى بمتباينة كوشي ــ شوارتز (Cauchy-Schwartz Inequality)

مبرهنة (5.1.1) :

اذا كان A,B اي زوج من المتجهات في اي فضاء اقليدي $(V, \langle \,,\, \rangle)$ فان

$$\langle A,B \rangle^2 \leq \langle A,A \rangle \langle B,B \rangle$$

البرهان :

اذا كان $B=O$ فان $\langle A,B \rangle = O$ و $\langle B,B \rangle = O$ وبهذه الحالة تكون المتباينة متحققة. افرض ان $B \neq O$ وضع

$$C = B/\sqrt{\langle B,B\rangle}$$

عليه يكون :

$$\langle C,C\rangle = \langle B/\sqrt{\langle B,B\rangle}\ ,\ B/\sqrt{\langle B,B\rangle}\ \rangle$$
$$= (1/\langle B,B\rangle).\ \langle B,B\ \rangle$$
$$= 1$$

الان ضع

$$r = \langle A,C\ \rangle$$

من خصائص الضرب الداخلي نحصل على :

$$0 \leq \langle A\text{-}rC, A\text{-}rC\ \rangle$$
$$\leq \langle A,A\rangle - \langle A,rC\rangle - \langle rC,A\rangle + \langle rC,rC\rangle$$
$$\leq \langle A,A\rangle\ -2r\ \langle A,C\rangle + r^2\langle C,C\ \rangle$$
$$\leq \langle A,A\rangle\ -2r^2 + r^2$$

(لان $\langle C,C\rangle = 1$)

$$\leq \langle A,A\rangle\ -r^2$$

اذن :

$$r^2 \leq \langle A,A\rangle$$

بالتعويض عن $r = \langle A,C\rangle$, $C = B/\sqrt{\langle B,B\rangle}$ ، نحصل على

$$r^2 = (\langle A,C\rangle)^2 = (\langle A, B/\sqrt{\langle B,B\rangle}\rangle\ )^2 = \ \langle A,B\rangle^2/\langle B,B\rangle$$

اذن

$$\langle A,B\rangle^2/\langle B,B\rangle \leq \langle A,A\rangle$$

وعليه

$$\langle A,B\rangle^2 \leq \langle A,A\rangle\ \langle B,B\rangle$$

(و . هـ . م)

تمارين (5.1)

1 ـــ احسب $\langle A,B\rangle$ باستخدام الضرب الداخلي الاعتيادي على R^2 .

(أ) $A = (0,\ 2)$ ، $B = (1,\ -3)$ ، (ب) $A = (-1,7)$ ، $B = (\ 2,3)$

(ج) $A = (1/2,\ 3)$ ، $B = (0,0)$ ، (د) $A = (1,4)$ ، $B = (1,4)$

2 ـــ كرر تمرين (1) باستخدام الضرب الداخلي المعرف في مثال (2) .

3 ـــ احسب $\langle A,B\rangle$ باستخدام الضرب الداخلي الاعتيادي على R^4 .

(أ) $A = (2,-1,2,-1)$, $B = (2,-1,2,-1)$

(ب) $A = (3, \sqrt{2},0,1/2)$, $B = (-1,0,7,2)$

(ج) $A = (1,1,0,1)$, $B = (-2,3,5,6)$

3 ــ احسب $\langle A,B \rangle$ باستخدام الضرب الداخلي على $P_2(R)$ والمعرف في مثال (3).

(أ) $A = -1 + x - x^2 \quad , \quad B = x + 2x^2$

(ب) $A = \sqrt{3} + 4x + 5x^2 \quad , \quad B = \sqrt{3} + 4x + 5x^2$

4 ــ احسب $\langle A,B \rangle$ باستخدام الضرب الداخلي على $M_{mn}(R)$ والمعرف في مثال (5).

(أ) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(ب) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

(ج) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

5 ــ ليكن $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. حدد اياً مما يلي يكون ضرباً داخلياً على R^2 . في الحالات التي لايكون فيها الضرب داخلياً اذكر الشروط التي لاتتحقق.

(أ) $\langle A,B \rangle = x_1x_2 + 7y_1y_2$

(ب) $\langle A,B \rangle = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2$

(ج) $\langle A,B \rangle = 3x_1x_2 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4y_1y_2$

(د) $\langle A,B \rangle = x_1x_2 - y_1y_2$

(هـ) $\langle A,B \rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3y_1y_2$

6 ــ برهن على ان $\langle A,B \rangle = tr\,(AB^T)$ تعرف ضرباً داخلياً على الفضاء

$M_2(R)$ حيث $tr(X)$ هو اثر المصفوفة X ويساوي حاصل جمع العناصر على القطر الرئيسي .

7 ــ لتكن $B = B(x)$, $A = A(x)$ متعددتي حدود في $P_2(R)$ فبرهن على ان

$$\langle A,B \rangle = A(o)B(o) + A(1/2)B(1/2) + A(1)B(1)$$

يكون ضرباً داخلياً على $P_2(R)$.

8 ــ احسب $\langle A, B \rangle$ باستخدام الضرب الداخلي في مثال (7) .

(أ) $B = x + 4x^2$, $A = 2\text{-}x + 5x^2$

(ب) $B = -6 + 7x$, $A = 1+(1/2)x + x^2$

وذلك بالنسبة للقاعدة $\{A_1 = 2 , A_2 = 2 + x, A_3 = -x^2\}$ للفضاء $P_2 (R)$.

9 ــ حقق متباينة كوشي ــ شوارتز لكل من :

(أ) $B = (0,3)$, $A = (-1, -1)$ باستخدام الضرب الداخلي الاعتيادي

(ب) $B = (2, 6)$, $A = (1, 3)$ باستخدام الضرب الداخلي في مثال (7) بالنسبة للقاعدة $\{A_1 = (1, 3), A_2 = (-1, 5)\}$ الى R^2 .

(ج) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ باستخدام الضرب الداخلي في مثال (5)

10 ــ احسب $\langle A,B \rangle$ باستخدام الضرب الداخلي في مثال (7) .

(أ) $B = x + 4x^2$, $A = 2\text{-}x + 5x^2$

(ب) $B = x + x^2$, $A = -3 + 2x$

(ج) $B = -1 + 3x\text{-}7x^2$, $A = 2\text{-}x + 4x^2$

11 ــ اثبت انه في متباينة كوشي ــ شوارتز يتحقق التساوي اذا كان A,B مرتبطين خطياً .

12 ــ ليكن $B = (x_2,y_2,z_2)$, $A = (x_1,y_1,z_1)$. اثبت ان

$$\langle A,B \rangle = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + y_1y_2 + (y_1 + 2z_1)(y_2 + 2z_2)$$

يكون ضرباً داخلياً على R^3 .

(5.2) الطول والزاوية في الفضاءات الاقليدية .

نستخدم في هذا البند متباينة كوشي ــ شوارتز لتطوير مفاهيم الطول والزاوية في الفضاءات الاقليدية مثل فضاء المصفوفات او فضاء متعددات حدود وغيرها . بما ان $\langle A,A \rangle \geqq 0$ وذلك لاي متجه A في فضاء اقليدي فعليه يمكننا ان نعرف الطول والمسافة على النحو التالي :

تعريف :

اذا كان $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاءاً اقليدياً فان طول المتجه A يرمز له بالرمز $||A||$ ويعرف بواسطة :

$$||A|| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$$

كذلك فانه لاي زوج من المتجهات A,B في V نرمز للمسافة بين A و B بالرمز $d(A,B)$ وتعرف بواسطة :

$$d(A,B) = ||A-B||$$

مثال (1) :

اذا كان $A = (a_1,\ldots,a_n)$, $B = (b_1,\ldots\ldots,b_n)$ متجهين في R^n مع الضرب الداخلي الاعتيادي (راجع مثال (1) في البند (5.1)) فان

$$||A|| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{a^2{}_1 + a^2{}_2 + \ldots. + a^2{}_n}$$

وايضاً

$$d(A,B) = ||A-B||$$

$$= \sqrt{(a_1-b_1)^2 + \ldots. + (a_n-b_n)^2}$$

لاحظ ان هذين هما بالضبط صيغتا الطول والمسافة الاعتيادية التي عرفناها في دروس الفيزياء والتفاضل والتكامل .

مثال (2) :

نفرض ان R^2 له الضرب الداخلي المعرف في المثال (2) من البند السابق اي : $\langle A,B\rangle = 5a_1b_1 + 2a_2b_2$

وذلك عندما $A=(a_1,a_2)$ و $B=(b_1,b_2)$.

اذا كان $A=(2,3)$, $B=(o,-1)$ فجد طول كل من B,A ثم جد المسافة بينهما .

الحل :

$$||A|| = \sqrt{\langle A,A\rangle} = \sqrt{5(2)(2)+2(3)(3)} = \sqrt{38}$$

$$||B|| = \sqrt{\langle B,B\rangle} = \sqrt{5(0)(0)+2(-1)(-1)} = \sqrt{2}$$

$$d(A,B) = ||A-B|| = ||(2,4)|| = \sqrt{5(2)(2)+2(4)(4)} = \sqrt{52}$$

من المهم ان نتذكر دائماً ان كل من الطول والمسافة يعتمد على الضرب الداخلي المستخدم . ففي المثال (2) اعلاه كان طول المتجه $A=(2,3)$ يساوي $\sqrt{38}$ في حين ان طوله الاعتيادي (الطول الناشيء من الضرب الداخلي الاعتيادي) يساوي $\sqrt{13} = \sqrt{(2)^2+(3)^2}$ ، كذلك فان المسافة الاعتيادية بين B, A تساوي $\sqrt{20} = \sqrt{(2)^2+(4)^2}$

مثال (3) :

جد طول المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ وذلك بالاعتماد على الضرب الداخلي على الفضاء $M_{23}(R)$ المعرف في المثال (5) من البند (5.1) .

-1 0 1

الحل :

$$||A|| = \sqrt{\langle A,A\rangle}$$
$$= \sqrt{(1)(1)+(2)(2)+(0)(0)+(-1)(-1)+(0)(0)+(1)(1)} = \sqrt{7}$$

مثال (4) :

جد المسافة بين متعددتي الحدود

$A(x)=2x-1\ ,\ B(x)=x+2$

وذلك بالنسبة للضرب الداخلي على الفضاء $P_1(R)$ المعرف في المثال (3) من البند (5.1)

الحل :

$$d(A(x),B(x))=||A(x)-B(x)||$$
$$=||x-3||$$
$$=\sqrt{\langle x-3,x-3\rangle}$$

الان :

$$\langle x-3,x-3\rangle=\int_0^1 (x-3)(x-3)dx$$
$$=\int_0^1 (x^2-6x+9)dx$$
$$=19/3$$

اذن :

$$d(A(x),B(x))=\sqrt{19/3}$$

قبل البدء باعطاء خصائص الطول والمسافة سنذكر الصورة البديلة لمتباينة كوشي ــ شوارتز التي برهناها في البند السابق.

بما ان : $||B||^2=\langle B,B\rangle,\ ||A||^2=\langle A,A\rangle$ وذلك في اي فضاء اقليدي $(V,\langle\ ,\ \rangle)$. عليه بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المتباينة $\langle A,B\rangle^2\le\langle A,A\rangle\langle B,B\rangle$ ، نحصل على :

$$|\langle A,B\rangle|\le||A||\ ||B||$$

وهذه هي صيغة متباينة كوشي ــ شوارتز بدلالة الطول.

المبرهنتان التاليتان تعطيان الخصائص الاساسية للطول والمسافة.

مبرهنة (5.2.1)

اذا كان $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ فضاء متجهات اقليدي، فان الطول $||\quad||$ يحقق مايلي

1 ــ لكل $A \in V$,o $||A|| \geqslant$ و $||A|| = o$ اذا وفقط اذا $A = O$.

2 ــ لاي عدد حقيقي r ولاي متجه $A \in V$ يكون $||rA|| = |r| \, ||A||$
حيث ان $|r|$ هي القيمة المطلقة للعدد الحقيقي r .

3 ــ لاي زوج من المتجهات B,A يكون
$$||A+B|| \quad ||A|| + ||B||$$

(المتباينة اعلاه تسمى بالمتباينة المثلثية (Triangle inequality)

مبرهنة (5.2.2) :

اذا كان $(V, < , >)$ فضاء متجهات اقليدي، فان المسافة d تحقق مايلي :

1 ــ $d(A,B) \geq 0$ و $d(A,B) = 0$ اذا وفقط اذا $A = B$.

2 ــ $d(A,B) = d(B,A)$ وذلك لاي زوج من المتجهات A,B .

3 ــ لاي ثلاثة متجهات A,B,C في V يكون
$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$$
(المتباينة اعلاه تسمى ايضاً المتباينة المثلثية)

ان برهان الخصائص اعلاه سهل جداً ويعتمد على التعاريف بشكل مباشر ماعدا المتباينة المثلثية التي سنذكر برهانها .

برهان المتباينة المثلثية للطول :

$$||A+B||^2 = < A+B, A+B >$$
$$= < A,A > + 2 < A,B > + < B,B >$$
$$\leq \; A,A > + 2 \, | < A,B > | + < B,B >$$

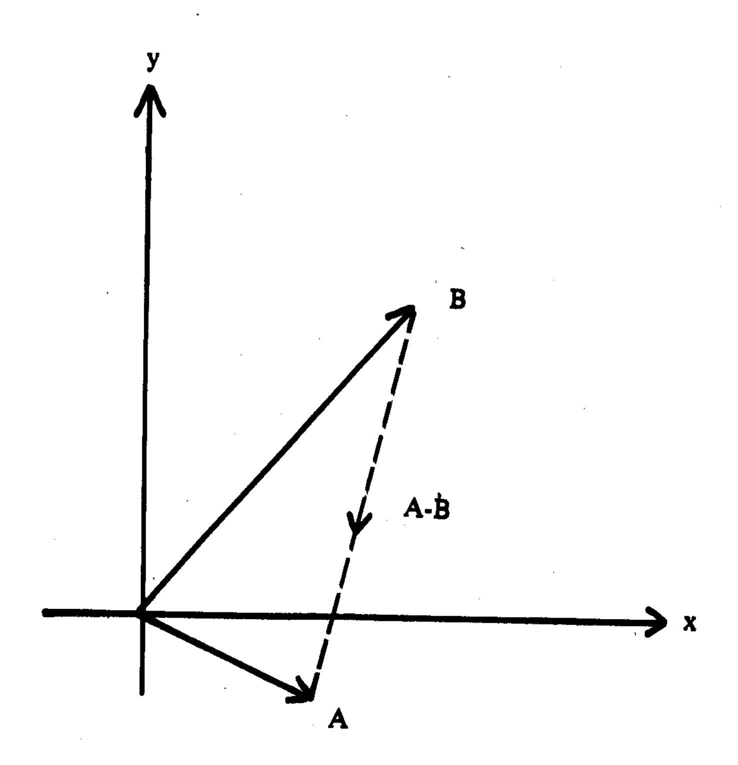
بأستخدام متباينة كوشي ــ شوارتز نحصل على

$$||A+B||^2 \leq < A,A > + 2 \, ||A|| \, ||B|| + < B,B >$$
$$= ||A||^2 + 2 \, ||A|| \, ||B|| + ||B||^2$$
$$= (||A|| + ||B||)^2$$

اخذ الجذر التربيعي يعطي $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(و . هـ . م)

المتباينة اعلاه سميت بالمتباينة المثلثية للسبب التالي .
في المستوي R^2 ، لدينا الصورة التالية :



عند ابدال B + بـ B- في المتباينة المثلثية ، نحصل على

$$\|A-B\| \leq \|A\| + \|-B\| = \|A\| + \|B\|$$

وهذا يعني ان حاصل جمع طولي اي ضلعين في مثلث يكون اكبر او مساوياً لطول الضلع الثالث (حقيقة معروفة في الهندسة المستوية) من هذا نرى ان معظم الخصائص الهندسية للطول والمسافة قد تعممت الى فضاءات مجردة (الفضاءات الاقليدية).

تعريف :

اذا كان B,A متجهين غير صفريين في فضاء اقليدي $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ فان الزاوية بين A و B تعرف بالمعادلة :

$$\cos\theta = \frac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\,\|B\|}$$

حيث : $0 \le \theta \le \pi$

ملاحظة : من متباينة كوشي ــ شوارتز التي تنص على ان

$$|\langle A,B\rangle| \le \|A\|\,\|B\|$$

نحصل على $\frac{|\langle A,B\rangle|}{\|A\|\,\|B\|} \le 1$ وهذا يعني ان $-1 \le \frac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\,\|B\|} \le 1$

من هذا تتضح شرعية التعريف، اي انه توجد زاوية وحيدة θ بحيث يكون $\cos\theta = \langle A,B\rangle/\|A\|\|B\|$ و $0 \le \theta \le \pi$.

مثال (5) :

جد الزاوية بين المتجهتين $A=(1,0)$ و $B=(0,1)$ وذلك في الفضاء R^2 المعرف عليه الضرب الداخلي الاعتيادي .

الحل : $\langle A,B\rangle = (1)(0)+(0)(1)=0$, $\|A\| = 1$, $\|B\| = 1$

اذن $\cos\theta = 0/1.1 = 0$ ، عليه تكون $\theta = \pi/2$

مثال (6) :

جد جيب تمام الزاوية بين المصفوفتين $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ وذلك في الفضاء $M_2(R)$ المعرف عليه الضرب الداخلي الذي نوقش في المثال (5) من البند (5.1) .

الحل : $\langle A,B\rangle = (1)(-1)+(0)(2)+(2)(0)+(-1)(3) = -4$

$$||A|| = \sqrt{(1)^2+(0)^2+(2)^2+(-1)^2} = 6$$

$$||B|| = \sqrt{(-1)^2+(2)^2+(0)^2+(3)^2} = 10$$

اذن :

$$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{6}\sqrt{10}} = \frac{-2}{\sqrt{15}}$$

تعريف :

في فضاء اقليدي $(V, < , >)$، يكون المتجهان B,A متجهين متعامدين اذا كان $<A,B> = 0$.

من هذا التعريف ومن تعريف الزاوية فان المتجهين B,A يكونان متعامدين اذا وفقط اذا كانت الزاوية بينهما تساوي $\pi/2$.

مثال (7) :

برهن على ان المتجهين $A = 1$, $B = x-1/2$ يكونان متعامدين وذلك في الفضاء $P_1(R)$ المعرف عليه الضرب الداخلي : $<A,B> = \int_0^1 A(x)B(x)dx$

الحل :

$$<A,B> = \int_0^1 (1)(x-1/2)dx$$

$$= \int_0^1 (x-1/2)\,dx = (x^2/2 - (1/2)x)^1_0 = 0$$

المبرهنة الثانية تعمم نظرية فيثاغورس المعروفة .

مبرهنة (5.2.3) :

اذا كان A و B متجهين متعامدين في فضاء اقليدي $(V, < , >)$ فان $||A+B||^2 = ||A||^2 + ||B||^2$.

البرهان :

$$||A+B||^2 = <A+B, A+B>$$

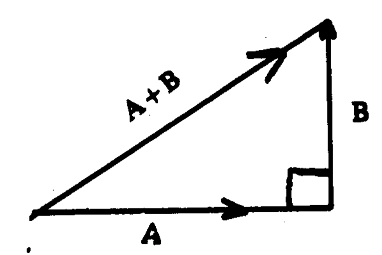
$$= <A,A> + 2<A,B> + <B,B>$$

$$= ||A||^2 + ||B||^2$$

وذلك لان $\langle A,B \rangle = 0$

(و . هـ . م)

لاحظ ان في R^2 او R^3 مع الضرب الداخلي الاعتيادي تختزل هذه المبرهنة الى نظرية فيثاغورس لعادية . لاحظ الشكل التالي :



في نهاية هذا البند نذكر القاريء بان مفاهيم الطول والمسافة والزاوية تعتمد على الضرب الداخلي المعرف على الفضاء وبما انه يمكن تعريف اكثر من ضرب داخلي واحد ، فعليه يمكن ايجاد اكثر من طول واحد مثلاً للمتجه ونرجو ان هذه المسألة لاتسبب تشتت في ذهن الطالب . الطول يكون واحداً وثابتاً عندما يثبت الضرب الداخلي ، وهكذا .

تمارين (5.2)

1 ــ ليكن R^2 له الضرب الداخلي $\langle A,B \rangle = 5x_1y_1 + x_2y_2$ حيث $B = (x_2,y_2)$ $A = (x_1,y_1)$. اوجد $||A||, ||B||, d(A,B)$ في كل مما يلي :

(أ) $B = (0,3), A = (2,1)$

(ب) $B = (2,2), A = (-1,-1)$

(ج) $B = (4,0), A = (0,4)$

2 ــ كرر تمرين (1) باستخدام الضرب الداخلي الاعتيادي .

3 ــ احسب $||A||, ||B||, d(A,B)$ باستخدام الضرب الداخلي على $P_3(R)$ والمعرف في مثال (3) من البند (5.1) .

(أ) $B = 2 + x - x^2 , \ A = 1 - x^3$.

(ب) $B = x - x^2 - x^3, \ A = 4 + x^2 - (1/2)x^3$

4 ــ احسب $||A||$, $||B||$, $d(A,B)$ باستخدام الضرب الداخلي على $M_{mn}(R)$ المعرف في مثال (5) من البند (5.1) .

(أ) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ ، في الفضاء $M_2(R)$.

(ب) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ، في الفضاء $M_{23}(R)$.

5 ــ اوجد جيب تمام الزاوية بين A,B في كل جزء من التمارين 4,3,2,1 .

6 ــ برهن على ان : $||A-B||^2 + ||A+B||^2 = 2(||A||^2 + ||B||)^2$ وذلك لاي متجهين A,B في فضاء اقليدي $(V,\langle,\rangle)$.

7 ــ برهن على ان : $||A-B|| \leq |\,||B|| - ||A||\,|$ وذلك لاي متجهين A,B في فضاء اقليدي $(V,\langle,\rangle)$.

8 ــ برهن على ان : $\langle A,B \rangle = 1/4(||A+B||^2 - ||A-B||^2)$ وذلك لاي متجهين A,B في فضاء اقليدي $(V,\langle,\rangle)$.

9 ــ برهن على ان :
$||A-B||^2 = ||A||^2 + ||B||^2 - 2\,||A||\,||B||\,\cos\theta$ حيث ان θ هي الزاوية بين A,B . وذلك في اي فضاء اقليدي $(V,\langle,\rangle)$.

10 ــ اذا كان A,B متجهين في فضاء اقليدي $(V,\langle,\rangle)$ بحيث ان $||A|| = ||B||$ فبرهن على ان $A+B$ يكون عمودياً على $A-B$.

11 ــ ليكن A,B متجهين غير صفريين في فضاء اقليدي $(V,\langle,\rangle)$. اوجد اقصر متجه $C = A + tB$. هل ان C يكون عمودياً على B ؟ .
(ارشاد : احسب طول C ثم استخدم افكار التفاضل والتكامل) .

12 ــ ليكن R^2 له الضرب الداخلي الاعتيادي . لاي من قيم r يكون A,B متعامدين ؟ .

(أ) $A = (1,2,1-r)$, $B = (-1,3,5)$

(ب) $A = (2r,7,2)$, $B = (r/2,-r,3)$

13 ــ اذا كان $V = C[0,1]$ فضاء الدوال الحقيقية والمستمرة والمعرفة على الفترة المغلقة $[0,1]$ ، فان : $\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ يكون ضرباً داخلياً على V .

(أ) هل ان الدالتين $f(x) = \sin 2\pi x$, $g(x) = \cos 2\pi x$ متعامدتان ؟ .

(ب) هل ان الدالتين $f(x) = \sin 2\pi mx$, $g(x) = \cos 2\pi nx$ متعامدتان ؟ .

(ج) اوجد متعددة حدود من الدرجة الثانية تكون عمودية على كل من الدالتين $f(x) = 1$, $g(x) = x$.

14 ــ برهن الاجزاء (1) , (2) في مبرهنة (5.2.1) والاجزاء (1), (2), (3) في مبرهنة (5.2.2) .

15 ــ في الفضاء الاقليدي R^2 مع الضرب الداخلي الاعتيادي، اوجد المحل الهندسي لجميع المتجهات A التي تحقق $||A|| = 1$. ارسم شكلاً .

(5.3) القواعد المتعامدة الاحادية ــ طريقة كرام ــ شميدت

Orthonormal bases and Gram - Schmidt process

لاحظنا في الفصل الاول ان كل فضاء متجهات منتهي البعد يكون له قاعدة. بالحقيقة توجد اكثر من قاعدة واحدة والمسائل التي تطرح تحدد نوعية القاعدة المطلوبة. في معظم هذه المسائل نحاول دائماً ايجاد قاعدة بسيطة المتجهات. في الفضاءات الاقليدية، تكون الحالة غالباً ان افضل اختيار للقاعدة هو الاختيار الذي تكون فيه جميع المتجهات متعامدة كل على الاخر. سنبين في هذا البند كيف يمكن بناء مثل هذه القواعد.

تعريف :

لتكن S مجموعة جزيئة من المتجهات في فضاء اقليدي $(V, \langle , \rangle)$. يقال بان S مجموعة متعامدة اذا وفقط اذا كان اي متجهين مختلفين في S متعامدين.

المجموعة المتعامدة تسمى مجموعة متعامدة احادية اذا وفقط اذا كان طول كل متجه فيها مساوياً الى 1 .

مثال (1) :

المجموعة $\{(0,0,0), (1,1,1)\}$ تكون مجموعة متعامدة في الفضاء R^3 مع الضرب الداخلي الاعتيادي، لكنها ليست مجموعة متعامدة احادية وذلك لان $||(1,1,1)|| = \sqrt{3}$.

مثال (2) :

المجموعة المتكونة من المتجهات

$$A_1 = (0,1,0),\ A_2 = (1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),\ A = (1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2})$$

تكون مجموعة متعامدة احادية في الفضاء R^3 مع الضرب الداخلي الاعتيادي . وذلك لان

$$\langle A_1,A_2\rangle = \langle A_1,A_3\rangle = \langle A_2,A_3\rangle = 0$$

وايضاً $||A_1|| = ||A_2|| = ||A_3|| = 1$

مثال (3) :

المجموعة $\left\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

ليست مجموعة متعامدة وذلك لان $\langle A_1,A_2\rangle \neq 0$.
وذلك في الفضاء $M_2(R)$ مع الضرب الداخلي الاعتيادي .

لنفترض الان ان A متجه غير صفري في فضاء متجهات اقليدي $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ ، فان المتجه $B = (1/||A||)\,A$

يكون متجهاً احادي الطول وذلك لان

$$||B|| = ||(1/||A||)A|| = (1/||A||)\,||A|| = 1$$

اذن يمكن دائماً ايجاد متجه احادي الطول من متجه غير صفري . اهمية ايجاد قاعدة متعامدة احادية لفضاء اقليدي تكمن جزئياً بالمبرهنة التالية التي توضح انه من البساطة بدرجة غير عادية ان نعبر عن متجه في الفضاء كتركيب خطي من متجهات تلك القاعدة .

مبرهنة (5.3.1) :

اذا كانت $S=\{A_1,\ldots,A_n\}$ قاعدة متعامدة احادية لفضاء اقليدي $(V,\langle\,,\rangle)$ ، وكان A اي متجه في V ، فان

$$A=\langle A,A_1\rangle A_1+\langle A,A_2\rangle A_2+\ldots+\langle A,A_n\rangle A_n$$

البرهان : بما ان S قاعدة الى V . اذن يمكن للمتجه A ان يكتب كتركيب خطي من متجهات S ، ليكن

$$A=x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_nA_n$$

لكل متجه A_k في S يكون

$$\langle A,A_k\rangle=\langle x_1A_1+x_2A_2+\ldots+\ldots+x_nA_k,A_K\rangle$$
$$=x_1\langle A_1,A_k\rangle+\ldots+x_k\langle A_k,A_k\rangle+\ldots+x_n\langle A_n,A_k\rangle$$

بما ان المجموعة S متعامدة احادية ، عليه يكون

$\langle A_i,A_i\rangle=||A_i||^2=1$ لكل i و $\langle A_i,A_j\rangle=0$ عندما $i=j$ اذن نحصل من المعادلة اعلاه على مايلي :

$$\langle A,A_k\rangle=x_k$$

وذلك لكل : $k=1,2,\ldots,n$ ، اي ان

$$A=\langle A,A_1\rangle A_1+\ldots+\langle A,A_n\rangle A_n$$

(و . هـ . م)

مثال (4) : ليكن

$$A_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad A_3=\begin{bmatrix}3/5 & 0\\ 4/5 & 0\end{bmatrix} \quad A_2=\begin{bmatrix}-4/5 & 0\\ 3/5 & 0\end{bmatrix} \quad A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

من السهل التأكد من ان المجموعة $S=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ تكون قاعدة متعامدة احادية للفضاء $M_2(R)$ بالنسبة للضرب الداخلي الاعتيادي. عبر عن المتجه $A=\begin{pmatrix}6 & -5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ كتركيب خطي من المتجهات في S. ثم اكتب متجه احداثيات A.

الحل :

$$\langle A,A_1\rangle = (6)(0)+(-5)(1)+(1)(0)+(0)(0) = -5$$

$$\langle A,A_2\rangle = (6)(-4/5)+(-5)(0)+(1)(3/5)+(0)(0) = -21/5$$

$$\langle A,A_3\rangle = (6)(3/5)+(-5)(0)+(1)(4/5)+(0)(0) = 22/5$$

$$\langle A,A_4\rangle = (6)(0)+(-5)(0)+(1)(0)+(0)(1) = 0$$

اذن من مبرهنة (5.3.1)

$$A = -5A_1-(21/5)A_2+(22/5)A_3$$

هذا المثال يوضح فائدة المبرهنة (5.3.1)، حيث انه اذا كانت القاعدة ليست متعامدة احادية فأنه يتوجب علينا حل نظام من المعادلات لكي نعبر عن المتجه بدلالة القاعدة (راجع الفصل الاول).

ان متجه احداثيات A اعلاه يكون $X=(-5,-21/5,22/5,0)$.

يمكن ايضاً معرفة احداثيات المتجهات بالنسبة الى قاعدة متعامدة، فاذا كانت $S=\{B_1,\ldots,B_n\}$ قاعدة متعامدة للفضاء الاقليدي $(V,\langle,\rangle)$ وكان $A\in V$ اي متجه فان :

$$A=(\langle A,B_1\rangle / \|B_1\|^2)B_1+\ldots+(\langle A,B_n\rangle / \|B_n\|^2)B_n$$

والبرهان مماثل تماماً لبرهان المبرهنة (5.3,1) ويترك كتمرين.

مبرهنة (5.3.2) :

اذا كانت $S=\{A_1,\ldots,A_n\}$ مجموعة متعامدة من المتجهات غير الصفرية في فضاء اقليدي $(V,\langle,\rangle)$ فان S تكون مستقلة خطياً.

البرهان : افرض ان $x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_nA_n = 0$.
لكل $k:1,2,...,n$ يكون لدينا

$$o = \langle A_k, O \rangle = \langle A_k, x_1A_1 + ... + x_nA_n \rangle$$
$$= x_1 \langle A_k, A_1 \rangle + ... + x_k \langle A_k, A_k \rangle + ... + x_n \langle A_k, A_n \rangle$$
$$= x_k \langle A_k, A_k \rangle$$

وذلك لأن
$\langle A_i, A_j \rangle = 0$ لكل $i \neq j$. بما ان متجهات S غير صفرية، عليه ينتج $\langle A_k, A_k \rangle \neq 0$ وبالتالي فان $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ بهذا تكون المجموعة S مستقلة خطياً .

(و . هـ . م)

مثال (5) :

اذا كان $A_1 = (1,1,1),\ A_2 = (0,1,-1),\ A_3 = (-2,1,1)$ فبرهن على ان المجموعة $S = \{A_1, A_2, A_3\}$ تكون قاعدة الى R^3 ثم عبر عن المتجه $A = (1,-1,1)$ كتركيب خطي من متجهات S .

الحل: أن السؤال اعلاه يمكن حله بالطرق المطروحة في الفصل الاول لكنها طرق طويلة. هنا نلاحظ ان المجموعة S تكون متعامدة وبالتالي وحسب المبرهنة (5.3.2) نستنتج من ان S مستقلة خطياً وبما ان عدد متجهاتها يساوي بعد الفضاء R^3 فانها حتماً ستكون قاعدة. لغرض كتابة المتجه $A = (1,-1,1)$ نستخدم الملاحظة التي تلت مثال (4) . اي

$$A = \frac{\langle A, A_1 \rangle}{\|A_1\|^2} A_1 + \frac{\langle A, A_2 \rangle}{\|A_2\|^2} A_2 + \frac{\langle A, A_3 \rangle}{\|A_3\|^2} A_3$$

الان عمليات حسابية بسيطة تظهر

$$\langle A,A_1\rangle = 1,\ \langle A,A_2\rangle = -2,\ \langle A,A_3\rangle = -2$$
$$||A_1||^2 = 3\ ,\ ||A_2||^2 = 2,\ ||A_3||^2 = 6$$

عليه يكون لدينا :

$$A = (1/3)A_1 - A_2 - (1/3)A_3$$

القواعد المتعامدة الاحادية تفيد ايضاً لمعرفة الضرب الداخلي بسرعة وكما موضح في المبرهنة التالية :

مبرهنة (5.3.3)

اذا كانت $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$ قاعدة متعامدة احادية لفضاء اقليدي $(V, \langle\, ,\rangle)$ وكان

$$A = a_1A_1 + \ldots + a_nA_n$$
$$B = b_1A_1 + \ldots + b_nA_n$$

فان

$$\langle A,B\rangle = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$$

البرهان

$$\langle A,B\rangle = \langle a_1A_1 + \ldots + a_nA_n, b_1A_1 + \ldots + b_nA_n\rangle$$
$$= \sum_{i,j} a_ib_j \langle A_i,A_j\rangle$$
$$= a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$$

وذلك لان

$$\langle A_i,A_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

(و . هـ . م)

ناقشنا في البند (1.9) من الفصل الاول مسألة الاحداثيات وقلنا بانه اذا كانت المجموعة $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$ قاعدة الى فضاء متجهات V على الحقل F، فيوجد لاي متجه $A \in V$ متجه وحيد $X = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ يسمى بمتجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة S.

في حالة كون V فضاءاً اقليدياً فانه حتماً وحسب التعريف سيكون فضاءاً على حقل الاعداد الحقيقية . بذلك تكون متجهات احداثيات متجهات V

واقعة في R^n . المبرهنة اعلاه تنص على ان الضرب الداخلي لاي متجهين في فضاء متجهات اقليدي $(V, <,>)$ يساوي الضرب الداخلي الاعتيادي في R^n لمتجهي احداثياتهما بالنسبة لاي قاعدة متعامدة احادية الى V . المثال الاتي يوضح مانقصده .

مثال (6) :

برهن على ان $S = \{1/\sqrt{2}, (\sqrt{3}/\sqrt{2})x\}$ تكون قاعدة متعامدة احادية للفضاء $P_1(R)$ المعرف عليه الضرب الداخلي

$$\langle A,B\rangle = \int_{-1}^{1} A(x)B(x)dx$$

ثم جد الضرب الداخلي للمتجهين $A = 2-x, B = 3 + 5x$

الحل: ضع $A_2 = \sqrt{3}/\sqrt{2}x, A_1 = 1/\sqrt{2}$

بما ان $\langle A_1, A_2\rangle = \int_{-1}^{1} (\sqrt{3}/2)\, xdx = O$

عليه فان S تكون مجموعة متعامدة . الان

$$||A_1||^2 = \langle A_1, A_1\rangle = \int_{-1}^{1} (1/2)\, dx = 1$$

$$||A_2||^2 = \langle A_2, A_2\rangle = \int_{-1}^{1} (3/2)x^2\, dx = 1$$

بما ان $\dim(P_1(R)) = 2$ و S مجموعة مستقلة خطياً لانها متعامدة وبما ان طول كل متجه فيها يساوي 1 فان S قاعدة متعامدة احادية الى $P_1(R)$.

يمكننا ايجاد الضرب الداخلي $\langle 2-x, 3+5x\rangle$ باستخدام التعريف أي

$$\langle 2-x, 3+5x\rangle = \int_{-1}^{1} (2-x)(3+5x)dx = 26/3$$

لكن لو اردنا تطبيق ماورد في المبرهنة (5.3.3) والملاحظة التي تليها

فيجب علينا ان نجد قيمة احداثيات كل من $3+5x, 2-x$ بالنسبة للقاعدة S .
نلاحظ مايلي

$$3+5x = 3\sqrt{2}\,(1/\sqrt{2}) + (5\sqrt{2}/\sqrt{3})(\sqrt{3}/\sqrt{2})(x)$$

$$2-x = 2\sqrt{2}\,(1/\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}/\sqrt{3})(\sqrt{3}/\sqrt{2})(x)$$

اذن يكون متجه احداثيات $3+5x$ بالنسبة للقاعدة S, $X=(3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}/\sqrt{3})$
ويكون متجه احداثيات $2-x$ بالنسبة للقاعدة S, $Y=(2\sqrt{2}, -\sqrt{2}/\sqrt{3})$. الان
الضرب الداخلي الاعتيادي للمتجهين Y,X في R^2 يكون

$$\langle X,Y\rangle = (3\sqrt{2})(2\sqrt{2}) + (5\sqrt{2}/\sqrt{3})(-\sqrt{2}/\sqrt{3})$$
$$= 12 - 10/3 = 26/3$$

اذن :
$$\langle 3+5x, 2-x\rangle = 26/3$$

بعد ان استعرضنا فوائد القواعد المتعامدة الاحادية في الفضاءات الاقليدية ، نتجه الان الى محاولة معرفة كيفية ايجاد تلك القواعد . نبدأ بالمبرهنة التالية التي ترينا كيفية ايجاد قاعدة متعامدة احادية ، اذا عرفنا قاعدة متعامدة .

مبرهنة (5.3.4) :

اذا كانت $S=\{A_1,\dots,A_n\}$ مجموعة متعامدة من المتجهات الغير الصفرية في فضاء إقليدي $(V,\langle\,,\rangle)$ فان المجموعة $H=\{A_1/\|A_1\|,\dots,A_n/\|A_n\|\}$ تكون مجموعة متعامدة احادية وتولد الفضاء الجزئي المولّد نفسه من قبل المجموعة S ، اي $[S]=[H]$.

البرهان :

انه لمن الواضح ان اطوال متجهات H مساوية للواحد . الان بما ان

$$\langle A_i/\|A_i\|, A_j/\|A_j\| \rangle = (1/\|A_i\| \; \|A_j\|) \langle A_i, A_j \rangle$$

$$= \frac{1}{\|A_i\| \; \|A_j\|} \, o = o$$

وذلك لكل $i \neq j$.

اذن تكون المجموعة H متعامدة احادية . لنأخذ $A \in [S]$ ، عليه توجد اعداد حقيقية $a_1, \ldots, a_n$ تحقق

$$A = a_1 A_1 + \ldots + a_n A_n$$

المعادلة اعلاه يمكن ان تكتب بالصيغة

$$A = (a_1 \|A_1\|) A_1/\|A_1\| + \ldots + (a_n \|A_n\|) A_n/\|A_n\|$$

وعليه يكون A قد كتب كتركيب خطي من متجهات H وبالتالي يكون $A \in [H]$. اذن يكون $[S] \subset [H]$. اما اذا كان $B \in [H]$ فانه توجد اعداد حقيقية $b_1, \ldots, b_n$ تحقق

$$B = b_1 (A_1/\|A_1\|) + \ldots + b_n (A_n/\|A_n\|)$$

$$= (b_1/\|A_1\|) A_1 + \ldots + (b_n/\|A_n\|) A_n$$

واذن $B \in [S]$. من هذا نستنتج على ان $[H] \subset [S]$ وبالتالي يكون $[S] = [H]$.

(و . هـ . م)

مبرهنة (5.3.5) : (طريقة كرام ــ شمدت للتعامد الاحادي)

لكل فضاء جزئي من فضاء اقليدي $(V, \langle , \rangle)$ توجد قاعدة متعامدة احادية .

البرهان :

لنفرض ان M فضاء جزئي من V . بما ان V فضاء منتهي البعد فان M يكون فضاءاً منتهي البعد وعليه توجد قاعدة الى M ولتكن $S=\{A_1,\ldots,A_n\}$ وذلك حسب المبرهنة (1.8.3) . سوف نطبق طريقة معينة لبناء قاعدة متعامدة احادية الى M وذلك باستخدام القاعدة S كأداة اولية . هذه الطريقة تعرف بطريقة كرام — شمدت .

ضع

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 - (\langle B_2,B_1\rangle /\|B_1\|^2)\, B_1$$

$$B_n = A_n-(\langle A_n,B_{n-1}\rangle /\|B_{n-1}\|^2)\, B_{n-1}-\ldots-(\langle A_n,B_1\rangle / \|B_1\|^2)\, B_1$$

يجب علينا برهنة مايلي :

1 — $\|B_i\| \neq o$ وذلك لكل $i=1,2,\ldots,n$. عندئذ يحق لنا القسمة على $\|B_i\|$ في المعادلات اعلاه .

2 — المجموعة $H=\{B_1,\ldots,B_n\}$ تكون مجموعة متعامدة .

3 — المجموعة H اعلاه تكون قاعدة الى M .

عندئذ يمكننا ايجاد قاعدة متعامدة احادية الى M وذلك باستخدام المبرهنة (5.3.4) التي تقسم المتجهات على اطوالها .

لبرهنة (1) اعلاه نلاحظ انه في حالة وجود k بحيث $\|B_k\|=o$ فأن خصائص الطول تحتم على ان $B_k=O$ وعند تعويض ذلك في المعادلة التي تعرف B_k نحصل على :

$$O=A_k-(\langle A_k,B_{k-1}\rangle /\|B_{k-1}\|^2)B_{k-1}-\ldots-(\langle A_k,B_1\rangle /\|B_1\|^2)B_1$$

اي ان

$$A_k=(\langle A_k,B_{k-1}\rangle / \|B_{k-1}\|^2)B_{k-1}+\ldots+(\langle A_k,B_1\rangle /\|B_1\|^2)B_1$$

لكن عند التعويض عن كل من $B_1 = A_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$ بدلالة $A_1, \ldots, A_{k-1}$ نحصل على ان A_k يكون تركيباً خطياً من $A_1, \ldots, A_{k-1}$ وهذا تناقض لان المجموعة $\{A_1, \ldots A_n\}$ مستقلة خطياً .

اذن $B_k \neq O$ لكل $k: 1,2,\ldots,n$

سوف نبرهن (2) اعلاه بالاستقراء الرياضي وكما يلي :

اولاً : المجموعة B_1, B_2 متعامدة وذلك لان

$$\langle B_1, B_2 \rangle = \langle A_1, A_2 - (\langle A_2, A_1 \rangle / \|A_1\|^2) A_1 \rangle$$

$$= \langle A_1, A_2 \rangle - (\langle A_2, A_1 \rangle / \|A_1\|^2) \langle A_1, A_1 \rangle$$

$$= \langle A_1, A_2 \rangle - (\langle A_2, A_1 \rangle / \|A_1\|^2) \|A_1\|^2$$

$$= 0$$

ثانياً : لنفرض ان المجموعة $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ متعامدة . عندئذ ستكون المجموعة $\{B_1, B_2, \ldots, B_k, B_{k+1}\}$ متعامدة ايضاً وذلك لانه لكل $i = 1,2,\ldots,k$ يكون لدينا

$$\langle B_{k+1}, B_i \rangle = \langle A_{k+1} - (\langle A_{k+1}, B_k \rangle / \|B_k\|^2) B_k - \ldots - (\langle A_{k+1}, B_1 \rangle / \|B_1\|^2) B_1, B_i \rangle$$

$$= \langle A_{k+1}, B_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} (\langle A_{k+1}, B_j \rangle / \|B_j\|^2) \langle B_j, B_i \rangle$$

بما ان $\{B_1,\ldots,B_k\}$ مجموعة متعامدة بالفرض، لهذا يكون $\langle B_j,B_i\rangle = o$ وذلك لكل $j \neq i$. بالتعويض نحصل على :

$$\langle B_{k+1},B_i\rangle = \langle A_{k+1},B_i\rangle -(\langle A_{k+1},B_i\rangle /||B_i||^2)\langle B_i,B_i\rangle$$
$$= 0$$

نستنتج من الاستقراء الرياضي على ان المجموعة $\{B_1,\ldots,B_n\}$ تكون مجموعة متعامدة . بما ان كل مجموعة متعامدة من المتجهات غير الصفرية تكون مستقلة خطياً (مبرهنة 5.3.2) فعليه تكون $\{B_1,\ldots,B_n\}$ قاعدة الى M وذلك لاحتوائها على عدد من المتجهات المستقلة خطياً مساوياً لبعد الفضاء الجزئي M وذلك حسب نتيجة (1.8.8) . بعد حصولنا على قاعدة متعامدة $\{B_1,\ldots,B_n\}$ نحصل على قاعدة متعامدة احادية $H=\{C_1,\ldots,C_n\}$ وذلك بأخذ $C_k = B_k/\|B_k\|$ $n,\ldots,1 = k,$

(و . هـ . م)

مثال (7) :

جد قاعدة متعامدة احادية للفضاء الجزئي

$M=\{(x,y,z,w):x+y-2w=0\}$

س الفضاء الاقليدي R^4 مع الضرب الداخلي الاعتيادي .

الحل :

نحاول اولاً ايجاد اي قاعدة الى M ثم نبني القاعدة المتعامدة الاحادية منها .

لايجاد قاعدة الى M نكتب M بالصيغة

$M=\{(x,y,z,w):x=2w-y=y=y,z=z,w=w\}$

المتجهات $A_1= (-1,1,o,o)$, $A_2=(0,0,1,0)$, $A_3=(2,0,0,1)$ تكون قاعدة الى M . الان نطبق طريقة كرام ـــ شمدت لاستخراج قاعدة متعامدة احادية . ضع

$B_1=A_1=(-1,1,0,0)$

$B_2 = A_2 - (\langle A_2, B_1 \rangle / ||B_1||^2) B_1$

$B_3 = A_3 - (\langle A_3, B_2 \rangle / ||B_2||^2) B_2 - (\langle A_3, B_1 \rangle / ||B_1||^2) B_1$

الان $\langle A_2, B_1 \rangle = o$

$||B_1||^2 = (-1)^2 = (1)^2 = 2$

اذن $B_2 = (0,0,1,0)(-0/2)(-1,1,0,0)$

$= (0,0,1,0)$

الان :

$\langle A_3, B_2 \rangle = o, \ \langle A_3, B_1 \rangle = -2, \ ||B_2||^2 = 1$

بالتعويض نحصل على

$B_3 = (2,0,0,1) (-2/2)(-1,1,0,0)$

$= (2,0,0,1) + (-1,1,0,0)$

$= (1,1,0,1)$

اذن $||B_1|| = \sqrt{2}, \ ||B_2|| = 1, \ ||B_3|| = \sqrt{3}$

بأخذ $C_1 = B_1 / ||B_1|| = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)$

$C_2 = B_2 / ||B_2|| = (0,0,1,1)$

$C_3 = B_3 / ||B_3|| = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3})$

نكون قد حصلنا على قاعدة متعامدة احادية للفضاء الجزئي M ، مكونة من المتجهات C_1, C_2, C_3 .

مثال (8) :

جد قاعدة متعامدة للفضاء الاقليدي $P_2(R)$ مع الضرب الداخلي

$$\langle A,B \rangle = \int_0^1 A(x)B(x)dx$$

الحل : نبدأ بالقاعدة الطبيعية المكونة من المتجهات

$$A_1 = 1 \; , \; A_2 = x \; , \; A_3 = x^2$$

ونطبق طريقة كرام ــ شمدت وذلك بأخذ

$$B_1 = 1$$

$$B_2 = x - (\langle x, B_1 \rangle / ||B_1||^2) B_1$$

$$B_3 = x^2 - (\langle x^2, B_2 \rangle / ||B_2||^2) B_2 - (\langle x^2, B_1 \rangle / ||B_1||^2) B_1$$

$$||B_1||^2 = \langle B_1, B_1 \rangle = \int_0^1 (1)(1)dx = 1$$

$$\langle x, B_1 \rangle = \langle x, 1 \rangle = \int_0^1 x\, dx = 1/2$$

$$\langle x^2, B_1 \rangle = \langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$$

$$B_2 = x - 1/2$$

$$||B_2||^2 = \langle B_2, B_2 \rangle = \int_0^1 (x-1/2)^2 dx = 1/12$$

$$\langle x^2, B_2 \rangle = \int_0^1 x^2(x-1/2)dx = 1/12$$

بالتعويض نحصل على

$$B_3 = x^2-(1/12)/(1/12)\ (x-1/2)-((1/3)/1)(1)$$

$$= x^2-x+1/6$$

بما ان اي فضاء متجهات يمكن اعتباره كفضاء جزئي من نفسه وبما أنه يمكن دائماً ايجاد قاعدة متعامدة احادية لاي فضاء جزئي من فضاء اقليدي ، اذن نكون قد حصلنا على مايلي .

نتيجة (5.3.6) :

لكل فضاء اقليدي $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ توجد قاعدة متعامدة احادية .

تمارين (5.3)

1 ـــ ليكن R^2 له الضرب الداخلي الاعتيادي . اي مما يلي يكون مجموعة متعامدة من المتجهات .

(أ) $(-1,0)\ ,\ (0,\ \ 3)$ ، (ب) $(-1,2)\ ,\ (4,5)$

(ج) $(0, \sqrt{2})\ ,\ (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ، (د) $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\ ,\ (-1/\sqrt{2},\ \ 1/\sqrt{2})$

(هـ) $(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})\ ,\ (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$

اي من المجموعات اعلاه يكون مجموعة متعامدة احادية ؟ .

2 ـــ ليكن R^3 له الضرب الداخلي الاعتيادي. اي مما يلي يكون مجموعة متعامدة احادية من المتجهات.

(أ) $(1,1,0)$, $(-1,1,0)$, $(0,0,1)$

(ب) $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$, $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$, , $(0,0,1)$

(ج) $(2/3,-2/3,1)$, $(2/3,1/3,-2/3)$, $(1/3,2/3,2/3)$

(د) $(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})$, $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)$

3 ـــ ليكن $P_3(R)$ له الضرب الداخلي المعرف في مثال (3) من البند (5.1). اي مما يلي يكون مجموعة متعامدة من المتجهات ؟.

(أ) $1,x-1/2$ ، (ب) $1,x-1$

(ج) x,x^2-1 ، (د) $x,3x^2-2,2x^3$

4 ـــ اذا كان $A=(1/\sqrt{5},-1/\sqrt{5})$ و $B=(2/\sqrt{30},3/\sqrt{30})$.
فبرهن على ان المجموعة $\{A,B\}$ متعامدة احادية اذا كان R^2 له الضرب الداخلي $\langle A,B\rangle = 3x_1y_1+2x_2y_2$ ولا تكون متعامدة احادية في حالة الضرب الداخلي الاعتيادي.

5 ـــ اثبت ان :

$A_1=(2,0,0,3),A_2=(-3,2,-1,2),A_3=(0,3,6,0)$

$A_4=(-6,-52/5,26/5,4)$.

تكون مجموعة متعامدة من المتجهات في R^4 مع الضرب الداخلي الاعتيادي. بجعل طول كل من هذه المتجهات يساوي واحد، احصل على مجموعة متعامدة احادية.

6 ـــ اوجد متجه احداثيات المتجه $A=(1,-5,7,6)$ بالنسبة للقاعدة المتعامدة الى R^4 الموجودة في تمرين (5). (استخدم الملاحظة التي تلي مثال (4)).

7 ــ اوجد متجه احداثيات المتجه $C=(-2,1)$ بالنسبة للقاعدة المتعامدة الاحادية الى R^2 الموجودة في تمرين (4). (استخدم مبرهنة (5.3.1).

8 ــ ليكن R^2 له الضرب الداخلي الاعتيادي. استخدم طريقة كرام ــ شميدت لتحويل القاعدة $\{A,B\}$ الى قاعدة متعامدة احادية.

(أ) $B=(4,1), A=(1,4)$ و (ب) $B=(1,0), A=(5,-2)$

(ج) $B=(-3,6),\ A=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$، (د) $A=\ (1,0)$، $B=\ (0,7)$.

9 ــ ليكن $P_2(R)$ له الضرب الداخلي المعرف في مثال (3) من البند (5.1) استخدم طريقة كرام ــ شميدت لتحويل القاعدة الطبيعية $\{1,x,x^2\}$ الى قاعدة متعامدة احادية.

10 ــ ليكن R^3 له الضرب الداخلي $\langle A,B\rangle = x_1x_2+3y_1y_2+5z_1z_2$ حيث $B=(x_2,y_2,z_2),\ A=(x_1,y_1,z_1)$. استخدم طريقة كرام شميدت لتحويل المجموعة:

$$\{\ A_1=\ (1,2,3)\ ,\ A_2=\ (-2,1,0),\ A_3=\ (0,-3,0)\ \}$$

الى مجموعة متعامدة أحادية.

11 ــ ليكن R^4 له الضرب الداخلي الاعتيادي. أوجد قاعدة متعامدة أحادية للفضاء الجزئي المولَّد من قبل المجموعة:

$$.\{A_1=\ (1,1,2,2),\ A_2=\ (-1,1,2,2)\ ,\ A_3=\ (0,\ 1,\ 3,\ 5)\ \}$$

12 ــ اذا كانت المجموعة $S=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ قاعدة متعامدة احادية للفضاء الاقليدي $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ فإثبت انه اذا كان A متجهاً في V فان:

$$.\ ||A||^2=\langle A,A_1\rangle^2+\langle A,A_2\rangle^2+\ldots.+\langle A,A_n\rangle^2$$

13 ــ اذا كانت $A,\ B,\ C$ ثلاثة متجهات مستقلة خطياً في فضاء إقليدي $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ فبرهن على انه بالامكان دائماً ايجاد متجه بالصيغة:

$$A + tB + sC$$

بحيث يكون عمودياً على كل من B و C .

(5.4) المتممات العمودية Orthogonal Compliments

ناقشنا في البند الخامس من الفصل الاول مسألة الجمع المباشر للفضاءات الجزئية . فاذا كان V اي فضاء متجهات منتهي البعد وعلى اي حقل F ، وكان M اي فضاء جزئي من V فانه دائماً بالامكان ايجاد فضاء جزئي آخر مثل N بحيث ان $V = M \oplus N$ (مبرهنة 5.4.1) ادناه .ان وجود N يعتمد على القواعد المختارة ويمكن تواجد فضاءات جزئية كثيرة مختلفة عندما تجمع مع M تعطي V ، هذا ماسنراه من خلال الامثلة القادمة. في الفضاءات الاقليدية يمكن ان نعرف مايسمى بالفضاء المتمم العمودي لاي فضاء جزئي وهذا عندما يجمع مع الفضاء الجزئي المعطى ينتج كل الفضاء.

تعريف :

اذا كان V اي فضاء متجهات على اي حقل F وكان M فضاءاً جزئياً من V ، فنقول بان N فضاءٌ متمم الى M اذا وفقط اذا كان N فضاءاً جزئياً من V محققاً الى $V = M \oplus N$.

مبرهنة (5.4.1) :

لأي فضاء جزئي M من اي فضاء متجهات منتهي البعد V ، يوجد فضاء متمم .

البرهان :

نختار اي قاعدة الى M ولتكن $\{A_1, \ldots, A_m\}$. هذه عبارة عن مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات في V . عليه وحسب المبرهنة (1.8.5)، فانه توجد مجموعة متجهات $\{B_1, \ldots, B_n\}$ بحيث ان المجموعة $\{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$ تكون

قاعدة الى V . اذا كان N هو الفضاء الجزئي المولّد من قبل مجموعة المتجهات $\{B_1,\ldots,B_n\}$ فان $V = M \oplus N$.

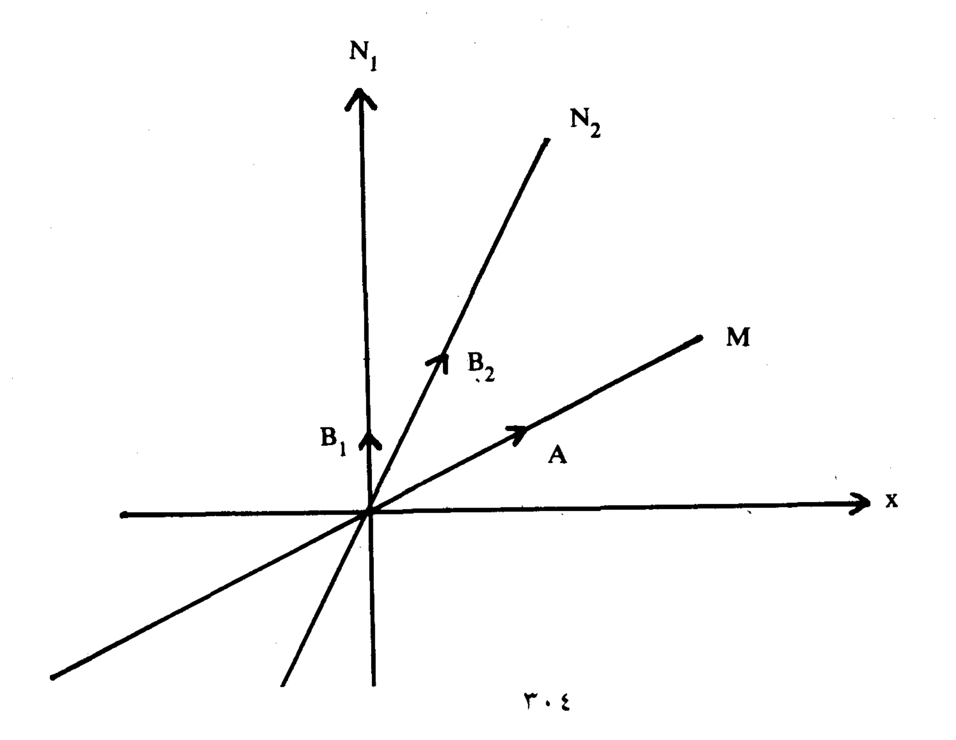
(و . هـ . م)

مثال (1) :

اذا كان $M = \{(x,y): x - 2y = o\}$ فجد فضاءين جزئيين مختلفين كل منهما يكون متمماً الى M .

الحل : المجموعة $\{A = (2,1)\}$ تكون قاعدة الى M . ضع : $B_2 = (1,2)$, $B_1 = (0,1)$.

لاحظ ان المجموعة $\{A,B_1\}$ تكون قاعدة الى R^2 والمجموعة $\{A,B_2\}$ تكون قاعدة اخرى وهكذا فانه يمكننا اختيار متجهات مختلفة تحقق الخاصية التالية : عند وضعها مع A تنتج قاعدة الى R^2 .
فاذا كان N_1 هو الفضاء الجزئي المولّد من قبل المتجه المضاف B_1 . و N_2 هو الفضاء الجزئي المولّد من قبل المتجه المضاف B_2 فان $R^2 = M \oplus N_1$ و $R^2 = M \oplus N_2$. الشكل التالي يوضح الفكرة .



وهذا يعني ان اي مستقيم مار بنقطة الاصل وغير منطبق مع M يكون فضاءاً متمماً الى المستقيم M .

ان فكرة ايجاد فضاء متمم فكرة سهلة وتعتمد على اختيار قاعدة للفضاء الجزئي وتوسيعها الى قاعدة لكل الفضاء وهذا النوع من الامثلة قد نوقش سابقاً في الفصل الاول . ان هدفنا في هذا البند مناقشة نوع خاص من المتممات سنسميه المتممات العمودية .

نركز اهتمامنا الان على فضاء اقليدي $(V, \langle , \rangle)$ ونأخذ $M \subset V$، اي فضاء جزئي من V . نعرف المجموعة الجزئية :

$$M^{\perp} = \{A \in V : \langle A, B \rangle = 0, \forall B \in M\}$$

اي ان $M^{\perp}$ هي تلك المجموعة الجزئية التي تحتوي على المتجهات التي تكون عمودية على كل متجه في M . نلاحظ مايلي :

مبرهنة (5.4.2) :

اذا كان M فضاءاً جزئياً من الفضاء الاقليدي $(V, \langle , \rangle)$.

فان :

1 ــ $M^{\perp}$ يكون فضاءاً جزئياً .

2 ــ $M \cap M^{\perp} = \{0\}$

3 ــ $V = M \oplus M^{\perp}$

4 ــ $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

البرهان :

1 ــ افرض ان $A, B \in M^{\perp}$. المطلوب ان نبرهن على ان $A + B \in M^{\perp}$. لهذا الغرض نأخذ C اي متجه في M فنلاحظ

$$\langle C, A + B \rangle = \langle C, A \rangle + \langle C, B \rangle$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

اذن يكون $A+B$ عمودياً على اي متجه في M وبالتالي يكون $A+B \in M^{\perp}$ بالطريقة نفسها، لو كان $A \in M^{\perp}$ و r اي عدد حقيقي و C اي متجه في M فان $\langle rA,C \rangle = r\langle A,C \rangle = r\,0 = 0$ وعليه $rA \in M^{\perp}$ وهذا يعني ان $M^{\perp}$ يكون فضاءاً جزئياً من V.

2 ـ خذ $A \in M \cap M^{\perp}$، عليه ومن التعريف ينتج

$$\langle A,A \rangle = o$$

ومن خصائص الضرب الداخلي نحصل على $A = o$ واذن

$$M \cap M^{\perp} = \{o\}$$

3 ـ لكي نبرهن ان $V = M \oplus M^{\perp}$، يجب ان نبرهن انه لكل متجه $A \in V$ يوجد $B \in M$ و $C \in M^{\perp}$ بحيث ان $A = B + C$. لهذا الغرض نختار قاعدة متعامدة احادية الى M ولتكن $\{A_1,\ldots,A_m\}$. (طريقة كرام ـ شمدت).

ضع : $B = \langle A,A_1 \rangle A_1 + \ldots + \langle A,A_m \rangle A_m$

انه لمن الواضح ان $B \in M$. ضع $C = A - B$ بهذا يكون لدينا $A = B + C$ فاذا برهنا على ان $C \in M^{\perp}$ نكون قد اكملنا البرهان.

نلاحظ اولاً ان C يكون عمودياً على كل متجه في قاعدة M، اي

$$\begin{aligned}
\langle C,A_k \rangle &= \langle A-B,A_k \rangle \\
&= \langle A,A_k \rangle - \langle B\, A_k \rangle \\
&= \langle A,A_k \rangle - \langle \sum_{i=1}^{m} \langle A,A_i \rangle A_i, A_k \rangle \\
&= \langle A, A_k \rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle A, A_i \rangle \langle A_i,A_k \rangle
\end{aligned}$$

بما ان المجموعة $\{A_1,\ldots,A_m\}$ متعامدة احادية فان $\langle A_i,A_k \rangle = o$ لكل $i \neq k$ و $\langle A_k,A_k \rangle = 1$. بالتعويض نحصل على

$$\langle C,A_k \rangle = \langle A,A_k \rangle - \langle A,A_k \rangle \langle A_k,A_k \rangle$$

$$= \langle A,A_k \rangle - \langle A,A_k \rangle = o$$

لان لكل $D \in M$ يكون $D = \sum_{i=1}^{m} r_i A_i$ وبهذا نحصل على

$$\langle D,C\rangle = \langle \sum_{i=1}^{m} r_i A_i, C \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{m} r_i \langle A_i, C \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{m} r_i . 0 = 0$$

عليه يكون C عمودياً على كل متجه في M وبالتالي يكون $C \in M^{\perp}$.

4 ـــ لغرض برهنة $M = (M^{\perp})^{\perp}$ ، نأخذ $A \in M$ ونلاحظ $\langle A,B \rangle = 0$ لكل $B \in M^{\perp}$ اذا وفقط اذا $A \in (M^{\perp})^{\perp}$.

(و . هـ . م)

تعريف :

اذا كان $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاءاً اقليدياً و M فضاءاً جزئياً من V فان الفضاء الجزئي $M^{\perp}$ يسمى الفضاء المتمم العمودي الى M .

الان لو اعطي لنا فضاءٌ جزئي M من فضاء اقليدي $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ وطلب منا ايجاد $M^{\perp}$ فنتبع الخطوات التالية :

1 ـــ نجد اي قاعدة الى M ولتكن $\{A_1, \ldots, A_m\}$.
2 ـــ نوسع القاعدة اعلاه الى قاعدة $\{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$.
3 ـــ نطبق طريقة كرام ـــ شمدت للحصول على قاعدة متعامدة $\{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$ الى V .

عندئذ ستكون المجموعة $\{B_1, \ldots, B_n\}$ قاعدة متعامدة الى $M^{\perp}$ وذلك لان كل متجه فيها يكون عمودياً على كل متجه في M .

مثال (2) :

جد الفضاء المتمم العمودي للفضاء الجزئي

$$M = \{(x,y) : x-2y = o\}$$

وذلك في الفضاء الاقليدي R^2 مع الضرب الداخلي الاعتيادي .

الحل : لاحظنا في المثال (1) من هذا البند ان $\{A=(2,1)\}$ تكون قاعدة الى M .

نأخذ $\{A=(2,1), B=(0,1)\}$ كقاعدة الى R^2 الان نطبق طريقة كرام ـ شمدت

$$A' = A = (2,1)$$

$$B' = B - (\langle B, A' \rangle / \|A'\|^2) A'$$

$$= (0,1) - 1/5(2,1) = (-2/5, 4/5)$$

ليكن $M^\perp$ الفضاء المولد من قبل المتجه $B' = (-2/5, 4/5)$

اذن : $M^\perp = \{a(-2/5, 4/5) : a \in R\}$

$$= \{(x,y) : 2x + y = o\}$$

لاحظ ان $M^\perp$ عبارة عن مستقيم عمودي على المستقيم M .

اذا كان M فضاءاً جزئياً من فضاء اقليدي $(V, \langle , \rangle)$ فان $V = M \oplus M^\perp$ وذلك حسب المبرهنة (5.4.2) . اذن يمكن لاي متجه $A \in V$ ان يكتب بطريقة واحدة فقط كحاصل جمع متجه في M ومتجه في $M^\perp$.

تعريف :

اذا كان $A \in V$ بحيث $A = B + C$ ، $B \in M$ و $C \in M^\perp$ فان المتجه B يسمى مسقط (Projection) المتجه A على الفضاء الجزئي M .

مثال (3) .

جد مسقط المتجه $A = (3,4)$ على الفضاء الجزئي

$M = \{(x,y) : x - 2y = 0\}$

وذلك في الفضاء الاقليدي R^2 مع الضرب الداخلي الاعتيادي .

الحل : لقد لاحظنا في المثال (2) ان المجموعة

$$\{A_1 = (2,1),\ A_2 = (-2/5, 4/5)\}$$

تكون قاعدة متعامدة الى R^2 . بتطبيق مبرهنة (5.3.4) نحصل على

$$\{A'_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}),\ A'_2 = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})\}$$

كقاعدة متعامدة احادية الى R^2 بحيث ان A_1 قاعدة الى M و A_2 قاعدة الى M .

المبرهنة (5.3.1) تعلمنا كيف نكتب $A = (3,4)$ كتركيب خطي من A'_1, A'_2 .

$$A = (3,4) = \langle A, A'_1\rangle A'_1 + \langle A, A'_2\rangle A'_2$$

$$= 2\sqrt{5}(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) + \sqrt{5}(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$$

$$= (4,2) + (-1,2)$$

نلاحظ هنا ان $(4,2) \in M$ و $(-1,2) \in M^{\perp}$ وعليه يكون المتجه $B = (4,2)$ مسقط $A = (3,4)$ على M .

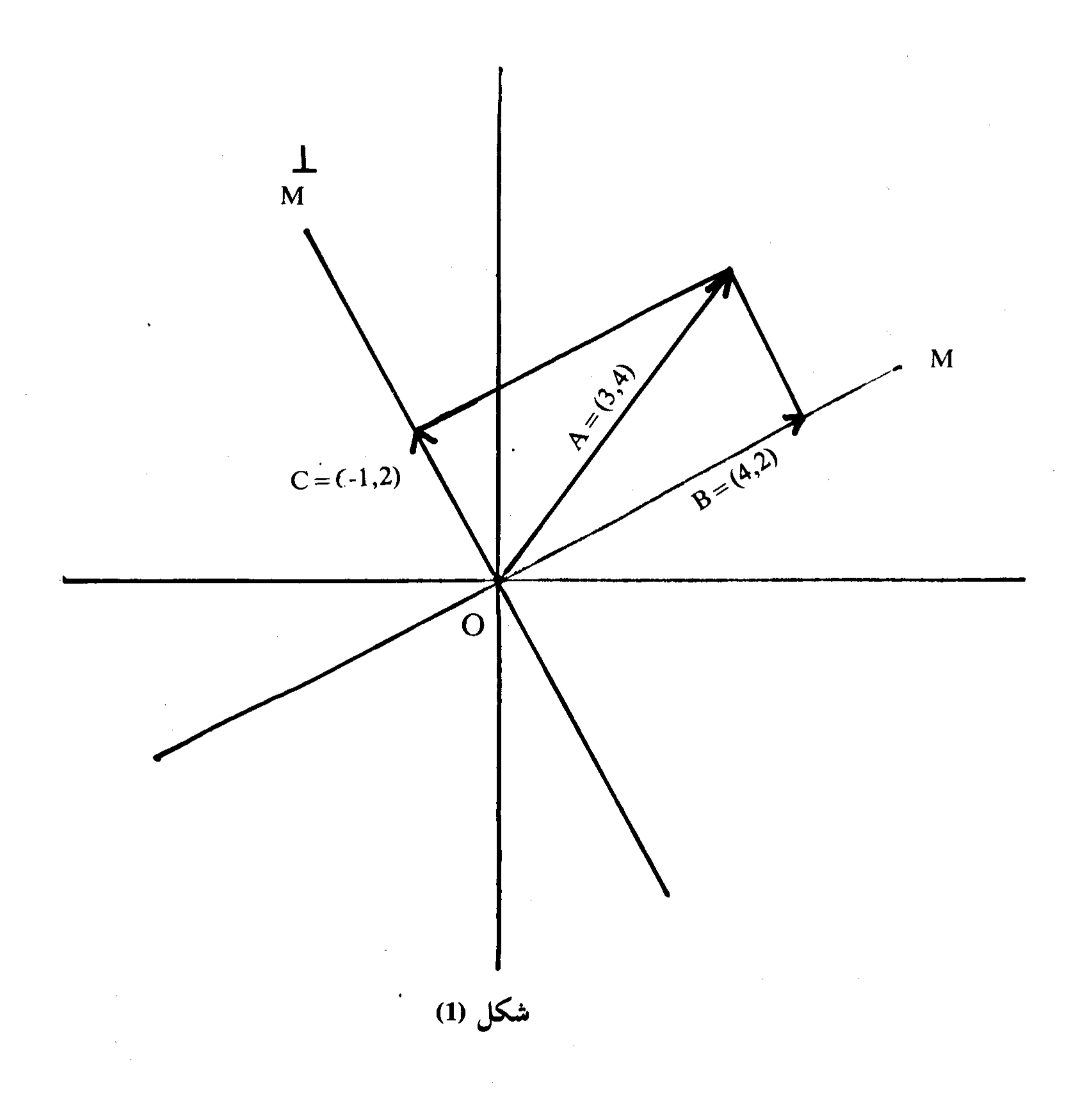
نلاحظ هنا ان ايجاد قاعدة متعامدة احادية الى الفضاء الجزئي M يكفي لايجاد مسقط اي متجه على M وذلك بتطبيق المبرهنة (5.3.1) . الشكل 1 يوضح فكرة المسقط على فضاء جزئي .

يمكننا ان نلخص طريقة ايجاد المساقط على فضاء جزئي M من فضاء اقليدي $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ كالاتي :

1 ــ جد قاعدة متعامدة احادية الى M ولتكن $\{A_1, \ldots, A_m\}$.

2 ــ ان مسقط اي متجه $A \in V$ على M يكون :

$$B = \langle A, A_1\rangle A_1 + \ldots + \langle A, A_m\rangle A_m$$



شكل (1)

مثال (4) :

جد مسقط المتجه $A=(2,1,0,1)$ على الفضاء الجزئي $M=\{(x,y,z,w):x+y-z=0,z+2w=0\}$ وذلك في الفضاء R^4 مع الضرب الداخلي الاعتيادي.

الحل : نكتب M بالصيغة

$M = \{(x,y,z,w) : x = -y-2w, z = -2w\}$

عليه يمكننا اخذ $\{A_1 = (-1,1,0,0), A_2 = (-2,0,-2,1)\}$ كقاعدة الى M . الان نستخرج قاعدة متعامدة احادية وذلك بأخذ

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 - (\langle A_2, B_1\rangle / \|B_1\|^2) B_1$

$= (-2,0,-2,1) - (2/2)(-1,1,0,0)$

$= (-1,-1,-2,1)$

$C_1 = B_1 / \|B_1\| = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)$

$C_2 = B_2 / \|B_2\| = (-1/\sqrt{7}, -1/\sqrt{7}, -2/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7})$

اذن تكون المجموعة $\{C_1, C_2\}$ قاعدة متعامدة احادية الى M ، وعليه يكون مسقط المتجه $A = (2,1,0,1)$ على M مساوياً الى

$B = \langle A, C_1\rangle C_1 + \langle A, C_2\rangle C_2$

$= (-1/\sqrt{2})(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0) + (-2/\sqrt{7})(-1/\sqrt{7}, -1/\sqrt{7}, -2/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7})$

$= (1/2, -1/2, 0, 0) + (2/7, 2/7, 4/7, -2/7)$

$= (11/14, -3/14, 4/7, -2/7)$

تمارين (5.4)

1 ــ اعتبر R^2 له الضرب الداخلي الاعتيادي . عبر عن $A = (2,3)$ بالصورة $A = B + C$ حيث B يقع في الفضاء الجزئي M المولد من قبل $A_1 = (-1,4)$ و C يكون عمودياً على M .

2 ــ اوجد الفضاء المتمم العمودي $M^{\perp}$ اذا علمت بان

$M=\{(x,y,z):x+2y-z=o\}$

وذلك في الفضاء R^3 مع الضرب الداخلي الاعتيادي . اوجد مسقط المتجه $A=(1,1,1)$ على M .

3 ــ اذا كان M هو الفضاء الجزئي من R^4 مع الضرب الداخلي الاعتيادي والمولد من قبل مجموعة المتجهات $\{A_1=(1,2,2,0),A_2=(0,1,5,4),A_3=(1,1,3,4)\}$ فاوجد $M^{\perp}$.
اوجد كذلك مسقط المتجه $B=(5,-11,13,9)$ على M .

4 ــ كرر التمرين (3) مع الفضاء الجزئي M المولد من قبل مجموعة المتجهات $\{A_1=(1,-2,3,5),A_2=(0,1,1,4)\}$. $B=(-1,-1,0,0)$.

5 ــ ليكن $M_2(R)$ له الضرب الداخلي

$$\langle A,B\rangle=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3+4a_4b_4$$

حيث $A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}$

ليكن $M=\left\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix} : a_4=O,\ a_1-a_2+a_3=O\right\}$

أوجد $M^{\perp}$. اوجد مسقط كل من المتجهات التالية على M .

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 7\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

عبر عن كل من المتجهات اعلاه كحاصل جمع متجهين احدهما في M والاخر يكون عمودياً على M .

6 ــ ليكن كل من M و N فضاءاً جزئياً من الفضاء الاقليدي $(V, \langle\ ,\ \rangle)$

برهن على ان :

$$(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$$

$$(M \cap N)^{\perp} = M^{\perp} + N^{\perp}$$

(5.5) : التحويلات العمودية (Orthogonal trnsformations)

عند دراسة الدوال بين الزمر، تدرس تلك الدوال التي تحفظ البنية الجبرية، اي الدوال التي تحفظ العملية الثنائية وهذه الدوال تسمى تماثلات (homorphisms). عند دراستنا للدوال بين فضاءات المتجهات، درسنا التحويلات الخطية التي كل منها يحفظ الجمع ويحفظ الضرب القياسي. الفضاءات الاقليدية هي عبارة عن فضاءات متجهات منتهية البعد وعلى حقل الاعداد الحقيقية لكن معرف عليها بنية جبرية اضافية وهي الضرب الداخلي، لذلك فمن الطبيعي ان ندرس تلك التحويلات الخطية التي تحفظ الضرب الداخلي، لكننا سندرس حالة خاصة وهي ان المجال يساوي المجال المقابل.

تعريف :

اذا كان $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاءاً اقليدياً فان اي تحويل خطي $T:V \to V$ يسمى تحويلاً عمودياً (orthogonal transformation) اذا وفقط اذا كان

$$\langle T(A),T(B) \rangle = \langle A,B \rangle$$

وذلك لاي زوج من المتجهات $A,B \in V$.

مثال (1) :

برهن على ان التحويل الخطي $T:R^2 \to R^2$، المعرف بالصيغة ،

$$T(x,y) = \left((1/\sqrt{2})x-(1/\sqrt{2})y,\ (1/\sqrt{2})x+(1/\sqrt{2})y\right)$$

يكون تحويلاً عمودياً وذلك بالنسبة للضرب الداخلي الاعتيادي على R^2.

الحل : نأخذ اي زوج من المتجهات

$$A_1 = (x_1, y) \ , \ A_2 = (x_2, y_2)$$

ونلاحظ مايلي

$$\langle A_1, A_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\langle T(A_1), T(A_2) \rangle = \left((1/\sqrt{2})x_1 - (1/\sqrt{2})y_1\right)\left((1/\sqrt{2})x_2 - (1/\sqrt{2})y_2\right) + \left((1/\sqrt{2})x_1 + (1/\sqrt{2})y_1\right)\left((1/\sqrt{2})x_2 + (1/\sqrt{2})y_2\right)$$

$$= (1/2)(x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + y_1y_2) + (1/2)(x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2)$$

$$= (1/2)(2x_1x_2 + 2y_1y_2)$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2$$

اذن

$$\langle A_1, A_2 \rangle = \langle T(A_1), T(A_2) \rangle$$

لهذا يكون T تحويلاً عمودياً .

مبرهنة (5.5.1) :

اذا كان $(V, \langle \, , \rangle)$ فضاءاً اقليدياً و $T: V \rightarrow V$ تحويلاً خطياً فان العبارات التالية تكون متكافئة .

1 ـــ T تحويل عمودي .

2 ـــ T يحفظ اطوال المتجهات ، بعبارة اخرى ، لكل $A \in V$ ، يكون

$$\|T(A)\| = \|A\|$$

3 ـــ لكل متجه احادي الطول $A \in V$ ، يكون المتجه $T(V)$ احادي الطول ايضاً .

البرهان :ـــ

لنفرض ان $T:V \to V$ تحويل عمودي . لكل $A \in V$ يكون لدينا :

$$\|T(A)\|^2 = \langle T(A),T(A)\rangle = \langle A,A\rangle = \|A\|^2$$

عليه فان T يحفظ اطوال المتجهات . الان نبرهن العكس .

لنفرض ان T يحفظ اطوال المتجهات . لاي زوج من المتجهات $A,B \in V$. نلاحظ ،

$$\langle T(A+B),T(A+B)\rangle - \langle T(A-B),T(A-B)\rangle$$

$$= 4\langle T(A),T(B)\rangle \qquad (1)$$

الطرف الايسر للمعادلة اعلاه يساوي :

$$\|T(A+B)\|^2 - \|T(A-B)\|^2$$

لكن T يحفظ اطوال المتجهات ، عليه يكون الطرف الايسر مساوياً الى

$$\|A+B\|^2 - \|A-B\|^2$$

يمكننا كتابة المقدار اعلاه بالصيغة :

$$\langle A+B,A+B\rangle - \langle A-B,A-B\rangle$$

عند التبسيط نحصل على ان المقدار اعلاه يكون مساوياً الى

$$4\langle A,B\rangle$$

بالرجوع الى المعادلة (1) نحصل على :

$$4\langle T(A),T(B)\rangle = 4\langle A,B\rangle$$

اي ان

$$\langle T(A),T(B)\rangle = \langle A,B\rangle$$

بذلك يكون T تحويلاً عمودياً . بهذا نكون قد برهنا على ان العبارة (1) تكافيء العبارة (2) ونترك تكافؤ العبارتين (2) و (3) وتكافؤ العبارتين (3) و (1) للقاريء .

(و . هـ . م)

المبرهنة اعلاه تنتج ان التحويل العمودي $T:V \rightarrow V$ يحفظ الزاوية بين المتجهات .

مبرهنة (5.5.2) :

اذا كان $T:V \rightarrow V$ تحويلاً عمودياً فان T يكون تحويلاً غير معتل (تشاكلاً) .

البرهان :

سنبرهن اولاً على ان $KerT = \{o\}$. لهذا الغرض نفرض ان $A \in V$ بحيث $T(A) = O$. من خصائص الضرب الداخلي وتعريف التحويل العمودي نحصل على ان $o = \langle T(A),T(A)\rangle = \langle A,A\rangle$ بذلك يكون $A = O$. بما ان V فضاءٌ اقليدي . فانه يكون منتهي البعد . الان المبرهنة (2.2.3) تنص على ان

$\dim(kerT) + \dim Im(V) = \dim(V)$

بما ان $kerT = \{0\}$ ، عليه نحصل على $\dim(Im(V) = \dim(V))$ وبذلك يكون T تشاكلاً حسب المبرهنة (2.3.3) .

(و . هـ . م)

مبرهنة (5.5.3) :

تركيب اي تحويليين عموديين يكون تحويلاً عمودياً .

البرهان :

اذا كان كل من $T:V \rightarrow V$ ، $S:V \rightarrow V$ تحويلاً عمودياً فانه لاي متجه $A \in V$ يكون لدينا

$||SoT(A)|| = ||S(T(A))|| = ||T(A)|| = ||A||$

المبرهنة (5.5.1) تنص على ان التحويل يكون عمودياً اذا وفقط اذا حفظ اطوال

المتجهات . بما ان SoT يحفظ اطوال المتجهات كما مبين اعلاه فانه يكون تحويلاً عمودياً .

(و . هـ . م)

ان مصفوفة التحويل العمودي بالنسبة لقاعدة متعامدة احادية تكون مصفوفة خاصة ، سنوضح خصائصها في المبرهنة التالية .

مبرهنة (5.5.4) :

اذا كانت $S=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ قاعدة متعامدة احادية للفضاء الاقليدي $(V,\langle\,,\,\rangle)$ و $T:V \to V$ تحويلاً عمودياً على V ، مصفوفته بالنسبة للقاعدة S هي M ، فان

1 ــ كل صف من صفوف M يكون احادي الطول ، وذلك باعتباره متجهاً في R^n بالنسبة للضرب القياسي الاعتيادي .

2 ــ صفوف M تكون مجموعة متعامدة من المتجهات .

3 ــ $M^{-1}=M^T$ ، وعليه فان العبارتين (1),(2) اعلاه تتحققان بالنسبة لاعمدة M .

البرهان :

لنفرض ان $M=(a_{ij})$. من تعريف مصفوفة التحويل الخطي بالنسبة لقاعدة معينة ، نحصل على :

$$T(A_i) = a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \ldots + a_{in}A_n$$

وذلك لكل $i:1,\ldots,n$. بذلك نحصل على

$$\langle A_i,A_j \rangle = \langle T(A_i),T(A_j)\rangle$$

$$= \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_k, \sum_{l=1}^{n} a_{il} A_l \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} \quad a_{jl} \langle A_k, A_l \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$$

حيث اننا استخدمنا العلاقة $\langle A_k,A_l \rangle = 0$ عندما $k \neq l$ و $\langle A_k,A_k \rangle = 1$ وذلك لان القاعدة $S = \{A_1,\ldots,A_n\}$ متعامدة احادية .

لو وضعنا : $X_i = (a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$

لاصبح المتجه $X_i \in R^n$ ، يمثل الصف i للمصفوفة M . ومن العلاقة اعلاه نحصل على ان

$$\langle X_i,X_j \rangle = \langle A_i,A_j \rangle$$

بذلك نحصل على : $\langle X_i,X_i \rangle = ||X_i||^2 = 1$

و $\langle X_i,X_j \rangle = o$

وذلك لكل $i \neq j$. هذا يبرهن (1),(2) .

لبرهنة (3) نلاحظ انه عند حساب MM^T فان العنصر في الصف i والعمود j للمصفوفة اعلاه عبارة عن الضرب الداخلي للصف i في المصفوفة M مع العمود j في المصفوفة M^T الذي يساوي الصف j للمصفوفة M ومن (1),(2) اعلاه نحصل على ان $MM^T = I$ وبالتالي يكون $M^{-1} = M^T$.

(و . هـ . م)

مثال (2) :

جد مصفوفة التحويل العمودي $T:R^2 \rightarrow R^2$ ، المعرف بالصيغة

$$T(x,y) = \left((1/\sqrt{2})x-(-1/\sqrt{2})y,\ (1/\sqrt{2})x + (1/\sqrt{2})y\right)$$

وذلك بالنسبة للقاعدة المتعامدة الاحادية $S = \{A_1, A_2\}$ حيث $A_1 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, $A_2 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. ثم حقق الخصائص التي وردت في المبرهنة (5.5.4) .

الحل :

$$T(A_1) = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10}) = (1/\sqrt{2})A_1 + (1/\sqrt{2})A_2$$

$$T(A_2) = (-3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}) = (-1/\sqrt{2})A_1 + (1/\sqrt{2})A_2$$

عليه ، تكون مصفوفة T بالنسبة للقاعدة اعلاه

$$M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان طول كل صف وكل عمود يساوي واحد ، كذلك فان صفي المصفوفة M متعامدين ، وكذلك فان $MM^T = I$ وبالتالي يكون $M^T = M^{-1}$

تعريف :

اذا كانت M مصفوفة مربعة على حقل الاعداد الحقيقية فان M تسمى مصفوفة عمودية اذا وفقط اذا $MM^T = I$

المبرهنة (5.5.4) تنص على ان مصفوفة التحويل العمودي بالنسبة لاي قاعدة متعامدة احادية تكون مصفوفة عمودية . ان العكس يكون صحيحاً ايضاً ، اي ان المصفوفة العمودية تؤدي الى تحويل عمودي كما في المبرهنة التالية .

مبرهنة (5.5.5) :

اذا كانت M مصفوفة عمودية ذات درجة $n \times n$ واذا كانت $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$ قاعدة متعامدة احادية للفضاء الاقليدي $(V, \langle , \rangle)$. فانه يوجد تحويل عمودي $T: V \to V$ ، مصفوفته بالنسبة للقاعدة S تساوي M .

البرهان :

ليكن $T:V \to V$ التحويل المعرف كما يلي :

اذا كان $A = x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$ فان

$$T(A) = y_1A_1 + \ldots + y_nA_n$$

حيث : $(y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1,x_2,\ldots,x_n)M$

واضح ان T يكون تحويلاً خطياً والان نبرهن على انه تحويلاً عمودياً . اولاً لاحظ ان

$$||T(A)||^2 = \langle T(A),T(A) \rangle$$

$$= y^2{}_1 + \ldots + y^2{}_n$$

وذلك حسب المبرهنة (5.3.3) لان S قاعدة متعامدة احادية . عليه نحصل على :

$$||T(A)||^2 = (y_1,y_2,\ldots,y_n)(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$$

$$= (x_1,\ldots,x_n)MM^T(x_1,\ldots,x_n)^T$$

$$= (x_1,\ldots,x_n)I(x_1,\ldots,x_n)^T$$

$$= x^2{}_1 + \ldots + x^2{}_n$$

$$= ||A||^2$$

بذلك يكون T تحويلاً عمودياً . نترك تحقيق ان M تكون مصفوفة T بالنسبة للقاعدة S ، للقاريء

(و . هـ . م)

مثال (3)

جد التحويل العمودي $T:R^3 \rightarrow R^3$ ، الذي مصفوفته بالنسبة للقاعدة الطبيعية (المتعامدة الاحادية) تكون المصفوفة العمودية :

$$M = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

الحل : لنأخذ $A = (x_1, x_2, x_3)$ كأي متجه في R^3 . لتكن :

$A_1 = (1,0,0),\ A_2 = (0,1,0), A_3 = (0,0,1)$

عناصر القاعدة الطبيعية . اذن

$A = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$

ضع

$$(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3)\ M$$
$$= (1/3)(2x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3)$$

اذن

$$T(A) = T(x_1, x_2, x_3) = y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3$$

$$= (1/3)(2x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 - 2x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3)$$

مثال (4) :

جد مصفوفة عمودية 3×3 ، صفها الاول يكون المتجه $X_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

الحل : بما ان صفوف المصفوفة العمودية عبارة عن متجهات متعامدة واحادية الطول فعلينا ايجاد متجهين Y_2, Y_3 متعامدين وكل منهما يكون احادي الطول وعمودي على X_1 . هذه المسألة تكافيء ايجاد قاعدة متعامدة احادية الى R^3 ، متجهها الاول هو X_1 . نطبق طريقة كرام ـــ شمدت على المتجهات .

$X_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), A_2(1,0,0), A_3 = (0,1,0)$

ضع

$B_2 = A_2 - (\langle A_2, X_1\rangle / \|X_1\|^2) X_1$

$B_3 = A_3 - (\langle A_3, B_2\rangle / \|B\|^2) B_2 - (\langle A_3, X_1\rangle / \|X\|^2) X_1$

بعد اجراء عمليات حسابية مماثلة للامثلة السابقة ، نحصل على

$B_2 = (1,0,0) - (1/\sqrt{2}(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$

$B_3 = (0,1,0)$

ضع

$Y_2 = B_2/\|B_2\| = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$

$Y_3 = B_3 = (0,1,0)$

المصفوفة :

$$M = 1/\sqrt{2} \quad \begin{matrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \cdot & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

تكون مصفوفة عمودية وتحقق المطلوب .

تمارين (5.5)

1 ـــ ليكن R^2 له الضرب الداخلي الاعتيادي . برهن على ان التحويل $T: R^2 \to R^2$ المعرف بالصيغة :

$$T(x,y) = (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$$

يكون تحويلاً عمودياً وذلك لاي قيمة الى θ .

2 ـــ اي من التحويلات التالية يكون تحويلاً عمودياً .

(أ) $T: R^3 \to R^3$ ، $T(x,y,z) = (y, 2x, z)$

(ب) $T: R^3 \to R^3$ ، $T(x,y,z) = (x, -y, -z)$

(ج) $T: P_2(R) \to P_2(R)$ ،

$$T(a + bx + cx^2) = a + ((b+c)/\sqrt{2})x + ((-b+c)/\sqrt{2})x^2$$

(د) $T:P_3(R) \rightarrow P_3(R)$ ،

$$T(a+bx+cx^2+dx^3) = -b+ax+dx^2-cx^3$$

3 ــ اذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة العمودية M فبرهن على ان $1/\lambda$ تكون ايضاً قيمة ذاتية الى M .

4 ــ برهن على ان كل من المصفوفات التالية تكون مصفوفة عمودية .

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5 ــ برهن على ان المصفوفة

$$A = (1/1+2a^2)\begin{bmatrix} 1 & -2a & 2a^2 \\ 2a & 1-2a^2 & -2a \\ 2a^2 & 2a & 1 \end{bmatrix}$$

تكون مصفوفة عمودية لاي قيمة للعدد الحقيقي a .

6 ــ اذا كانت B مصفوفة حقيقية مربعة ومتناظرة متخالفة $(B^T = -B)$ فبرهن على ان المصفوفة I + B تكون مصفوفة قابلة للقلب وان المصفوفة $A = (I-B)(I+B)^{-1}$ تكون مصفوفة عمودية .

7 ــ بأخذ $B = \begin{pmatrix} o & a \\ -a & o \end{pmatrix}$ ، اوجد A في تمرين (6) ثم حقق كونها مصفوفة عمودية .

8 ــ اوجد مصفوفة عمودية يكون صفها الاول (5/13,12/13,0)

9 ــ اوجد مصفوفة عمودية يكون صفها الاول (2/3, -2/3,1) وصفها الثاني (1/3,2/3,2/3) .

10 ــ اوجد مصفوفة عمودية يكون عموداها الاول والثاني كما يلي

$$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/3 \\ -1/3\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

11 ــ اذا كانت كل من A,B مصفوفة عمودية $n \times n$ فبرهن على ان AB تكون ايضاً مصفوفة عمودية .

12 ــ اذا كانت A مصفوفة عمودية فبرهن على ان : $\det(A) = |A| = \pm 1$

الفصـــل الســـادس

الصيغ ثنائية الخطية والصيغ التربيعية

Bilinear and Quadratic Forms

(6.0) مقدمـــة

الضرب الداخلي $\langle A, B \rangle$ لمتجهين في فضاء اقليدي $(V, \langle , \rangle)$ كان قد عرف بواسطة دالة $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow R$ تحقق اربعة شروط (راجع البند 5.1).

الشروط الثلاثة الاولى تنص على ان تلك الدالة تكون خطية في كل متغير. سندرس في هذا الفصل تلك الدوال التي تحقق الشروط الثلاثة الاولى وليس بالضرورة ان تحقق الشرط الرابع وسنطلق عليها اسم الدوال ثنائية الخطية. هذه الدراسة ستؤدي بنا الى دراسة الصيغ التربيعية. فمثلاً الطرف الايسر للمعادلة

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3$$

عبارة عن صيغة تربيعية بالمتغيرين x,y. في التفاضل والتكامل هذا النوع من المعادلات يمثل قطع مخروطي، لكن وجود الحد «2xy» كان عائق في معرفة نوعية القطع المخروطي، لذلك كنا نلجأ الى مسألة تدوير المحاور وكتابة المعادلة اعلاه بمتغيرات جدد من دون ان يكون بها حد ضرب تقاطعي (Cross product

term) . ان مسألة تحويل صيغة تربيعية الى صيغة بسيطة (قطرية) هي موضوع دراستنا في هذا الفصل حيث سنستخدم معظم المفاهيم السابقة التي درسناها للبرهنة على ان اي صيغة تربيعية بأي عدد من المتغيرات يمكن ان تتحول الى صيغة قطرية بمتغيرات جدد بعد ذلك نقدم الامثلة التطبيقية في معرفة القطوع المخروطية .

لقد جزأنا هذا الفصل الى بندين الاول يناقش الدوال ثنائية الخطية وخصائصها والثاني يناقش الدوال التربيعية والصيغ التربيعية وتطبيقاتها .

(6.1) الدوال ثنائية الخطية Bilinear maps

تعريف :

اذا كان V فضاء متجهات على حقل F ، فبدالة ثنائية الخطية على V ، نقصد دالة :

$f: V \times V \rightarrow F$

تحقق مايلي

1 ـ $f(A_1 + A_2,B) = f(A_2,B) + f(A_1,B)$ وذلك لأي متجهات $A_1, A_2, B \in V$.

2 ـ $f(A, B_1 + B_2) = f(A, B_1) + f(A, B_2)$ وذلك لأي متجهات $A, B_1, B_2 \in V$.

3 ـ $f(rA, B) = rf(A,B) = f(A, rB)$ وذلك لاي متجهات $A, B \in V$ ولأي عدد قياسي $r \in F$.

مثال (1) :

$V = R^n$ ، $F = R$ نعرف دالة

$f: R^n \times R^n \rightarrow R$

بالصيغه $f(A, B) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$

وذلك لاي زوج من المتجهات $A = (a_1, \ldots, a_n), B = (b_1, \ldots, b_n)$ الدالة f اعلاه تكون دالة ثنائية الخطية لانها تعرف الضرب الداخلي الاعتيادي على R^n (راجع مثال (1) من البند (5.1)) .

مثال (2) :

بصورة عامة، اذا كان $(V, \langle \ , \ \rangle)$ فضاءاً اقليدياً فإن دالة الضرب الداخلي

$\langle \ , \ \rangle : V \times V \rightarrow R$,

تكون دالة ثنائية الخطية . (راجع تعريف الضرب الداخلي في الفصل الخامس) .

مثال (3) :

اذا كانت $M = (a_{ij})$ مصفوفة $n \times n$ على الحقل F فأنه يمكن تعريف دالة ثنائية الخطية على F^n كالاتي :

$f: F^n \times F^n \rightarrow F$

$$f(X, Y) = XMY^T$$

حيث ان $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$Y^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

عند حساب الصيغة اعلاه نحصل على :

$$f(X,Y) = \sum_j \sum_i x_i a_{ij} y_j$$

سوف نوضح كيف ان كل دالة ثنائية الخطية تعطي مصفوفة وبالعكس .

مبرهنة (6.1.1) :

ليكن V فضاء متجهات منتهي البعد وعلى الحقل F ، ولتكن $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$ قاعدة ثابتة الى V ، فإن :

1 ـــ كل دالة ثنائية الخطية $f: V \times V \to F$ على V تعين مصفوفة $M(f)$ بالنسبة للقاعدة S بحيث ان

$$f(A, B) = X\, M(f)\, Y^T$$

حيث ان $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ هي متجهات احداثيات A , B على التوالي ، وذلك بالنسبة للقاعدة S .

2 ـــ كل مصفوفة M ذات درجة $n \times n$ على الحقل F تعين دالة ثنائية الخطية $f: V \times V \to F$ على V بحيث ان $M(f) = M$.

البرهان : (1) لتكن

$$M(f) = \begin{bmatrix} f(A_1, A_1) & f(A_1, A_2) \ldots & f(A_1 A_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(A_n, A_1) & f(A_n, A_2) & \ldots f(A_n, A_n) \end{bmatrix}$$

ليكن A, B اي متجهين في V بحيث ان $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ هو متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة S و $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ هو متجه احداثيات B بالنسبة للقاعدة S هذا يعني ان :

$$A = x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n$$

$$B = y_1 A_1 + \ldots + y_n A_n$$

بأستخدام خصائص الدوال ثنائية الخطية يمكننا ان نجري الحسابات التالية :

$$f(A, B) = f(x_1A_1 + \dots + x_nA_n, y_1A_1 + \dots + y_nA_n)$$

$$= y_1 f(x_1A_1 + \dots + x_nA_n, A_1) + \dots + y_n f(x_1A_1 + \dots + x_nA_n, A_n)$$

$$= y_1 \sum_{i=1}^{n} x_i f(A_i, A_1) + \dots + y_n \sum_{i=1}^{n} x_i f(A_i, A_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_j f(A_i, A_j)$$

لكن $f(A_i, A_j)$ هو العنصر في الصف i والعمود j للمصفوفة $M(f)$، عليه بمراجعة ضرب المصفوفات نرى بأن الصيغة اعلاه مساوية الى $XM(f)Y^T$. هذا يبرهن (1) .

2 ــ لنفرض اننا اعطينا مصفوفة M ذات درجة $n \times n$ وعلى الحقل F.نعرف دالة ثنائية الخطية .

$$f: V \times V \to F$$

بالصيغة $f(A, B) = XMY^T$

حيث ان X هو متجه احداثيات Y, A هو متجه احداثيات B . بهذه الحالة يكون لدينا $M(f) = M$ وذلك لان متجه احداثيات A_i بالنسبة للقاعدة S يكون المتجه (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0) (1 في المكان i) ومتجه احداثيات A_j بالنسبة للقاعدة S يكون (0, ..., 1, 0, ..., 0) (1 في المكان j) . عليه فأن

$$f(A_i, A_j) = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)\, M \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= m_{ij}$$

حيث ان m_{ij} هو العنصر في الصف i و العمود j للمصفوفة M.

(و . هـ . م)

مثال (4) :

جد مصفوفة الدالة ثنائية الخطية

$f: R^2 \times R^2 \to R$

المعرفة بالصيغة :

$$f: ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2$$

وذلك بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1 = (1,-1), A_2 = (2,1)\}$.

الحل :

$$M(f) = \begin{bmatrix} f(A_1, A_1) & f(A_1, A_2) \\ f(A_2, A_1) & f(A_2, A_2) \end{bmatrix}$$

$$f(A_1, A_1) = f((1,-1), (1,-1)) = 2 + 3 + 4 - 1 = 8$$

$$f(A_1, A_2) = f((1,-1), (2,1)) = 4 - 3 - 8 + 1 = -6$$

$$f(A_2, A_1) = f((2,1), (1,-1)) = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$$

$$f(A_2, A_2) = f((2,1), (2,1)) = 8 - 6 + 8 - 1 = 9$$

لهذا تكون مصفوفة f هي المصفوفة التالية :

$$M(f) = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 15 & 9 \end{bmatrix}$$

مثال (5) :

جد الدالة ثنائية الخطية

. $f: P_2(R) \times P_2(R) \rightarrow R$

التي تنتج من المصفوفة

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

وذلك بالنسبة للقاعدة الطبيعية $S = \{1, x, x^2\}$ الى $P_2(R)$.

الحل: ليكن :

$$A = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$B = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

اي متجهين في $P_2(R)$. عليه يكون متجه احداثيات A هو (a_0, a_1, a_2) ومتجه احداثيات B هو المتجه (b_0, b_1, b_2) وذلك بالنسبة للقاعدة S . بمراجعة مبرهنة (6.1.1) نحصل على

$$f(A, B) = (a_0, a_1, a_2)\, M \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$f(A, B) = (a_0, a_1, a_2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$= (a_0 + 2a_2, a_0 - a_2, - a_0 + a_1) \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$= (a_0 + 2a_2) b_0 + (a_0 - a_2) b_1 + (-a_0 + a_1) b_2$$

$$= a_o b_o + 2a_2b_o + a_o b_1 - a_2b_1 - a_ob_2 + a_1b_2$$

لنرى الان تأثير تغير القاعدة على مصفوفة الدوال ثنائية الخطية .

مبرهنة (6.1.2) :

اذا كانت $f: V \times V \rightarrow F$ دالة ثنائية الخطية على فضاء المتجهات المنتهي البعد V . لتكن $M(f)$ مصفوفة F بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1, ..., A_n\}$ و $M^*(f)$ مصفوفة f بالنسبة للقاعدة $S^* = \{A_1^*, ..., A_n^*\}$. بهذه الحالة ، توجد مصفوفة $n \times n$ قابلة للقلب P بحيث ان :

$$M^*(f) = PM(f)P^T$$

البرهان :

لتكن P مصفوفة الانتقال من القاعدة S^* الى القاعدة S . فإذا كانت $P = (p_{ij})$ فإن :

$$A^*_k = \sum_{j=1}^{n} P_{kj}A_j, \quad , \ k = 1, ..., n$$

ليكن الان A ، B اي متجهين في V وليكن :

X متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة S .

X^* متجه احداثيات A بالنسبة للقاعدة S^* .

Y متجه احداثيات B بالنسبة للقاعدة S .

$Y^\star$ متجه احداثيات B بالنسبة للقاعدة $S^\star$.

من المبرهنة (1.9.1) نحصل على مايلي

$Y = Y^\star P$ و $X = X^\star P$

والمصفوفة P تكون مصفوفة قابلة للقلب. (تذكر بأن مصفوفة الانتقال من S الى $S^\star$ تساوي P^{-1}).

بتطبيق مبرهنة (6.1.1) نحصل على

$$f(A, B) = X\,M(f)\,Y^T \;.....(1)$$

وذلك لاي زوج من المتجهات B, A في V بالنسبة للقاعدة S. لكن $M^\star(f)$ هي مصفوفة f بالنسبة للقاعدة $S^\star$، اذن

$$f(A, B) = X^\star\,M^\star(f)\,Y^{\star T} \;.....(2)$$

عند التعويض عن $Y = Y^\star P,\ X = X^\star P$ في (1) اعلاه ينتج

$$f(A, B) = (X^\star P)\,M(f)\,(Y^\star P)^T$$

$$= X^\star\,(PM(f)P^T)Y^{\star T}$$

بالمقارنة مع (2) نحصل على

$$X^\star PM(f)P^T\,Y^{\star T} = X^\star M^\star(f)\,Y^{\star T}$$

وذلك لأي $Y^\star, X^\star$ في F^n. من هذا نحصل على

$$M^\star(f) = PM(f)P^T$$

(و . هـ . م)

يوجد نوع مهم من الدوال ثنائية الخطية وهو مايسمى بالدوال ثنائية الخطية المتناظرة.

تعريف :

الدالة $f: V \times V \to F$ الثنائية الخطية تسمى متناظرة (Symmetric) اذا وفقط اذا كان

$$f(A, B) = f(B, A)$$

وذلك لأي زوج من المتجهات A, B في V .

مثال (6) :

الدالة ثنائية الخطية $f: R^2 \times R^2 \to R$

المعرفة بالصيغة :

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - y_1y_2$$

تكون دالة متناظرة وذلك لأن

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = f((x_2, y_2), (x_1, y_1))$$

مثال (7) :

الدالة ثنائية الخطية $g: R^2 \times R^2 \to R$

المعرفة بالصيغة :

$$g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 - y_1x_2$$

تكون دالة غير متناظرة وذلك لان

$$g((x_2, y_2), (x_1, y_1)) = x_2y_1 - y_2x_1$$

اي ان $g(A, B) \neq g(B, A)$

ان مصفوفات الدوال ثنائية الخطية المتناظرة تكون مصفوفات متناظرة وذلك بالنسبة لأي قاعدة .

مثال (8) :

جد مصفوفة الدالة ثنائية الخطية المتناظرة والمعرفة في المثال (6) اعلاه وذلك بالنسبة للقاعدة $S = \{(1,2), (-1, 0)\}$ الى R^2.

الحل : ضع $A_1 = (1,2)$ ، $A_2 = (-1, 0)$. الان

$$f((1,2), (1,2)) = (1)(1) - (2)(2) = -3$$

$$f((1,2), (-1,0)) = (1)(-1) - (2)(0) = -1$$

$$f((-1,0), (1,2)) = (-1)(1) - (0)(2) = -1$$

$$f((-1,0), (-1,0)) = (-1)(1) - (0)(0) = 1$$

عليه تكون مصفوفة الدالة المتناظرة f بالنسبة للقاعدة S اعلاه

$$M(f) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

لاحظ كيف انها مصفوفة متناظرة .

ان النتيجة الاساسية في هذا الفصل والتي سنطبقها في البند اللاحق تكمن في المبرهنة التالية .

مبرهنة (6.1.3) :

اذا كانت $f: V \times V \rightarrow R$ دالة ثنائية الخطية متناظرة على فضاء منتهي البعد V على حقل الاعداد الحقيقية R فإنه توجد قاعدة $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$ الى V ، بحيث ان مصفوفة F بالنسبة لها تكون قطرية ، اي ان $f(A_i, A_j) = 0$ عندما $i \neq j$.

بمراجعة المبرهنة (6.1.2) وملاحظة كون مصفوفة الدالة ثنائية الخطية المتناظرة تكون مصفوفة متناظرة، يمكننا ان نعبر عن المبرهنة اعلاه بصيغة المصفوفات وكما يلي:

مبرهنــة (6.1.4) :

لأي مصفوفة متناظرة M على حقل الاعداد الحقيقية، توجد مصفوفة قابلة للقلب P ، بحيث تكون PMP^{-1} مصفوفة قطرية. (اي ان كل مصفوفة حقيقية متناظرة تكون مشابهة الى مصفوفة قطرية).

لغرض برهنة المبرهنة اعلاه سنكون بحاجة لبضعة نتائج سوف نسمي كل منها مبرهنة تمهيدية، لكن قبل البدء بهذه المبرهنات التمهيدية سنذكر القارىء ببعض الامور التي سنكون بحاجة لها في البراهين.

لأي مصفوفة حقيقية M ذات درجة $n \times n$.

1 ــ نقول بأن العدد الحقيقي r يكون قيمة ذاتية الى M اذا وفقط اذا وجد متجه غير صفري $X = (x_1, \ldots, x_n)$ في R^n ، يحقق

$$XM = rX$$

عندئذ يسمى X متجهاً ذاتياً تابعاً للقيمة الذاتية r .

2 ــ لأي متجهين $X = (x_1, \ldots, x_n)$ ، $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ في R^n ، يمكن التعبير عن الضرب الداخلي الاعتيادي:

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

بالصيغة المصفوفية وكما يلي.

$$\langle X, Y \rangle = XY^T$$

$$= (x_1, \ldots, x_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

3 ـــ تسمى M مصفوفة عمودية اذا وفقط اذا كان $MM^T = I$ وهذا يؤدي الى كون صفوف المصفوفة M عبارة عن n من متجهات R^n متعامدة وأحادية الطول. قبل البدء بالمبرهنة التمهيدية، لابد من ذكر الخاصية المهمة للمتجهات الذاتية التابعة لقيم ذاتية مختلفة لمصفوفة حقيقية متناظرة.

مبرهنة (6. 1. 5):

اذا كانت M مصفوفة حقيقية متناظرة وكانت λ_2، λ_1 قيمتين ذاتيتين مختلفتين للمصفوفة M وكان X_1, X_2 متجهين ذاتيين تابعين للقميتين $\lambda_1 \lambda_2$ على التوالي فإن X_1 يكون عمودياً على X_2 اي ان $\langle X_1, X_2 \rangle = X_1 X_2^T = 0$

البرهان:

عندنا العلاقات التالية

$$X_1 M = \lambda_1 X_1 \quad .... (1)$$

$$X_2 M = \lambda_2 X_2 \quad ....(2)$$

بأخذ مدورة طرفي المعادلة (2) نحصل على:

$$M^T X^T{}_2 = \lambda_2 X_2^T$$

لكن M مصفوفة متناظرة وهذا يعني ان $M = M^T$.

اذن

$$MX_2^T = \lambda_2 X_2^T$$

بضرب هذه المعادلة في X_1 من اليسار، نحصل على:

$$X_1 M X_2^T = \lambda_2 X_1 X_2^T$$

بالتعويض عن $X_1 M$ بما يساويه من المعادلة (1) نحصل على:

$$\lambda_1 X_1 X_2^T = \lambda_2 X_1 X_2^T$$

اي

$$(\lambda_1 - \lambda_2) X_1 X_2^T = 0$$

لكن $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ وذلك لان $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

اذن $X_1 X_2^T = 0$.

(و . هـ . م)

المبرهنة اعلاه تنص على ان المتجهات الذاتية التابعة الى قيم ذاتية مختلفة تكون متعامدة وذلك لأي مصفوفة حقيقية متناظرة .

مبرهنة تمهيدية (1) :

اذا كانت M مصفوفة حقيقية متناظرة فإن كل قيمة ذاتية الى M تكون عدداً حقيقياً وكل متجه ذاتي يكون متجهاً في R^n . (n = درجة المصفوفة M) .

البرهان :

افرض ان λ هي قيمة ذاتية للمصفوفة M وان X متجهاً ذاتياً تابعاً للقيمة الذاتية λ. اذن

$$XM = \lambda X \qquad .....(1)$$

نحن نخوف من كون λ عدد عقدي وأحد مركبات المتجه $X = (x_1, \ldots, x_n)$ يكون عدداً عقدياً . لذلك سوف نبرهن على ان $\bar{\lambda} = \lambda$ و $\bar{x}_i = x_i$ حيث ان $\bar{\lambda}$ هو مرافق العدد العقدي λ ، عندئذ يكون λ عدداً حقيقياً و X متجهاً في R^n. بأخذ مرافق طرفي المعادلة اعلاه ، نحصل على :

$$\bar{X}\bar{M} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

حيث ان $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ وعناصر $\bar{M}$ هي مرافقات عناصر M. لكن M مصفوفة حقيقية ومرافق اي عدد حقيقي يساوي نفسه ، وعليه $M = \bar{M}$. اذن

$$\bar{X} M = \bar{\lambda} \bar{X} \qquad .... \quad (2)$$

بأخذ مدورة طرفي المعادلة (1) وملاحظة ان $M^T = M$ ، نحصل على :

$$MX^T = \lambda X^T$$

بضرب المعادلة اعلاه في X من اليسار نحصل على :

$$XMX^T = \lambda X X^T \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

بضرب المعادلة (2) من اليمين في X^T ، نحصل على :

$$\bar{X}MX^T = \bar{\lambda}\, \bar{X} X^T \qquad \ldots\ldots \quad (4)$$

بطرح (4) من (3) نحصل على

$$O = (\lambda - \bar{\lambda})\, \bar{X} X^T$$

لكن : $\bar{X} X^T = \bar{x}_1 x_1 + \ldots + \bar{x}_n x_n = \| X \|^2 \neq o$

وذلك لان $X \neq O$ متجه ذاتي .

اذن $O = \lambda - \bar{\lambda}$ وعليه $\lambda = \bar{\lambda}$ وبذلك يكون λ عدداً حقيقياً . الان المتجه X ، نحصل عليه من حل المعادلات المتأتية من المعادلة المصفوفية : $X(M - \lambda I) = O$

بما ان معاملات تلك المعادلات تأتي من المصفوفة الحقيقية $M - \lambda I$ فعليه تكون الحلول حقيقية وبالتالي تكون جميع مركبات المتجه X حقيقية وعليه يكون $X \in R^n$.

(و . هـ . م)

مبرهنة تمهيدية (2) :

لكل مصفوفة متناظرة حقيقية ذات درجة $n \times n$ ، توجد n من القيم الذاتية الحقيقية . (ليس بالضرورة ان تكون مختلفة) .

البرهان :

لننظر الى المعادلة المميزة للمصفوفة M ، ولتكن

$$|M - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = O$$

لو نظرنا الى حلول المعادلة اعلاه في حقل الاعداد العقدية لوجدنا ان لتلك المعادلة n من الحلول ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ وذلك ماتنص عليه المبرهنة الاساسية في الجبر .

لكن المبرهنة التمهيدية (1) تنص على ان جميع تلك الحلول تكون اعداداً حقيقية .

(و . هـ . م)

المبرهنة التالية تنتج المبرهنة (6.1.4) ومنها المبرهنة (6.1.3) .

مبرهنة (6.1.6) :

لأي مصفوفة حقيقية متناظرة M ، توجد مصفوفة عمودية P بحيث ان PMP^T تكون مصفوفة قطرية .

البرهان :

لتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ القيم الذاتية الحقيقية للمصفوفة M (هذا مانصت عليه المبرهنة التمهيدية (2)) .

اختار X_1 متجهاً ذاتياً للمصفوفة M تابعاً للقيمة الذاتية λ بحيث ان $\|X_1\| = 1$. سوف نفترض بأن القارىء يفهم الضرب القالبي (Block Multiplication) للمصفوفات .

إختار قاعدة متعامدة احادية الى R^n متجهها الاول هو X_1 ولتكن :ـ

$$\{X_1, Y_2, \dots, Y_n\}$$

عند ترتيب عناصر القاعدة اعلاه نحصل على مصفوفة

$$Q_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Q_1 تكون مصفوفة عمودية وذلك لان $Q_1 Q_1^T = I$. الان

$$Q_1 M Q_1^T = \begin{pmatrix} X_1 M \\ Y_2 M \\ \vdots \\ Y_n M \end{pmatrix} (X_1^T \ Y_2^T \dots Y_n^T)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 \\ Y_2 M \\ \vdots \\ Y_n M \end{pmatrix} (X_1^T \, Y_2^T \dots Y_n^T)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 X_1^T & \vdots & \lambda_1 X_1 Y_2^T \ \dots \ \lambda_1 X_1 Y_n^T \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ (Y_2 M X_1^T & \vdots & Y_2 M Y_2^T \ \cdots \ Y_2 M Y_n^T) \\ \vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (Y_n M X_1^T & \vdots & Y_n M Y_2^T \ \cdots \ Y_n M Y_n^T) \end{bmatrix}$$

بما ان $\{X_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ قاعدة متعامدة احادية ، عليه نحصل على ان $X_1 X_1^T = \|X_1\|^2 = 1$ و $X_1 Y_j^T = \langle X_1, Y_j \rangle = 0$ وذلك لكل $j: 2,\dots,n$ كذلك فإن تدوير طرفي المعادلة :

$$X_1 M = \lambda_1 X_1$$

ينتج :

$$MX_1^T = \lambda_1 X_1^T$$

وذلك لان M مصفوفة متناظرة.بذلك نلاحظ على ان

$$Y_j M X_1^T = Y_j \lambda_1 X_1^T =$$

$$= \lambda_1 Y_j X_1^T = \lambda_1 \langle Y_j, X_1 \rangle$$

$$= \lambda_1 . o = o$$

وذلك لكل $j=2, \ldots, n$.

بالتعويض نحصل على :

$$Q_1 M Q_1^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \vdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \vdots & B_1^{(n-1)\times(n-1)} \end{bmatrix}$$

المصفوفة B_1 عبارة عن مصفوفة ذات درجة $(n-1) \times (n-1)$. كذلك فإن

1 ـــ B_1 مصفوفة متناظرة .

2 ـــ القيم الذاتية للمصفوفة B_1 تكون $\lambda_n, \ldots, \lambda_2$.

نكرر العملية نفسها على المصفوفة B_1 كالأتي :

اختر متجهاً ذاتياً احادي الطول وليكن X_2 تابعاً للقيمة الذاتية λ_2 للمصفوفة B_1 اي ان

$$X_2 B_1 = \lambda_2 X_2$$

(لاحظ ان $X_2 \in R^{n-1}$) . بتطبيق الفكرة اعلاه فأنه توجد مصفوفة عمودية $\bar{Q}_2$ ذات درجة $(n-1) \times (n-1)$ تحقق

$$\bar{Q}_2 B_1 \bar{Q}_2^T = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \vdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \vdots & B_2 \end{bmatrix}$$

حيث ان B_2 مصفوفة ذات درجة $(n-2) \times (n-2)$ متناظرة وقيمها الذاتية تكون $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$.

ضع

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & Q_2 \end{bmatrix}$$

Q_2 مصفوفة عمودية ذات درجة $n \times n$. الان لاحظ :

$$Q_2(Q_1 M Q_1^T) Q_2^T = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & Q_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & Q_2'^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \vdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \vdots & Q_2' B_1 Q_2'^T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \vdots & O \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & & \vdots & B_2^{(n-1) \times (n-1)} \end{bmatrix}$$

نكرر العملية نفسها على المصفوفة B_2 فنحصل على مصفوفة عمودية Q_3 ومصفوفة B_3 ذات درجة $(n-3) \times (n-3)$ متناظرة وتحقق :

$$Q_3(Q_2 Q_1 M Q_1^T Q_2^T) Q_3^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O & \vdots & O \\ & \lambda_2 & & \vdots & \\ O & & \lambda_3 & \vdots & \\ - - & - - & - - & - & - - \\ & O & & \vdots & B_3^{(n-2) \times (n-2)} \end{bmatrix}$$

وهكذا الى ان نحصل على Q_{n-1} بحيث ان :

$$Q_{n-1}(Q_{n-2} \ldots Q_1 M Q_1^T \ldots Q_{n-2}^T) Q_{n-1}^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

ضع
$$P = Q_{n-1} Q_{n-2} \cdots Q_2 Q_1$$
اذن
$$P^T = Q_1^T Q_2^T \ldots Q^T_{n-2} Q^T_{n-1}$$
وعليه يكون لدينا : —
$$PMP^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
اي ان PMP^T مصفوفة قطرية . بما ان P حاصل ضرب مصفوفات عمودية فأذن تكون مصفوفة عمودية .

(و . هـ . م)

بما ان كل مصفوفة عمودية عبارة عن مصفوفة قابلة للقلب فإن هذا يبرهن المبرهنة (6.1.4) .

الان المبرهنة (6.1.4) تنص على ان كل مصفوفة حقيقية متناظرة تكون مشابهة الى مصفوفة قطرية .

بالرجوع الى المبرهنة (4.3.2) نلاحظ مايلي :

اذا كانت M مصفوفة متناظرة حقيقية فإن العلاقة :
$$PMP^{-1} = D$$
حيث ان D مصفوفة قطرية ، تنتج ان صفوف المصفوفة P تكون متجهات ذاتية الى M وعناصر المصفوفة القطرية تكون قيماً ذاتية الى M .

ان خلاصة ماتقدم تكمن في مايلي :

اذا كانت M مصفوفة متناظرة حقيقية فإن M يكون لها n من القيم الذاتية ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ربما بعضها مكررة واذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متجهات ذاتية متعامدة واحادية الطول تابعة للقيم الذاتية اعلاه على التوالي للمصفوفة M فإن المصفوفة P التي صفوفها مكونة من المتجهات الذاتية اعلاه تكون مصفوفة عمودية . اي انه اذا كانت

$$P = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

فإن P مصفوفة عمودية وتحقق

$$PMP^{-1} = PMP^{T} = D$$

ملاحظـــة :

ان الحصول على مجموعة متجهات ذاتية متعامدة واحادية الطول يتم بتطبيق طريقة كرام ـــ شمدت .

يمكن توضيح ماجاء اعلاه بالمثال التالي :ـــ

مثال (9) :

جد مصفوفة عمودية P ، تحقق PAP^{T} تكون مصفوفة قطرية ، حيث ان A مصفوفة متناظرة .

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل: المعادلة المميزة للمصفوفة A هي

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8) = O$$

عندئذ تكون القيم الذاتية للمصفوفة A: $\lambda = 2$ ، $\lambda = 8$. يمكن بالطرق المستخدمة في الفصل الرابع اثبات ان المتجهين :

$A_1 = (-1, 1, 0), A_2 = (-1, 0, 1)$

يكونان قاعدة للفضاء الذاتي التابع للقيمة الذاتية $\lambda = 2$. تطبيق طريقة كرام — شمدت على $\{A_1, A_2\}$ يؤدي الى مجموعة متعامدة أحادية من المتجهات الذاتية التالية (حقق ذلك) .

$B_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ و $B_2 = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$

الفضاء الذاتي التابع للقيمة الذاتية $\lambda = 8$ له القاعدة

$A_3 = (1, 1, 1)$

تطبيق طريقة كرام ــ شمدت على A_3 يؤدي الى المتجه الاحادي الطول $B_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

اخيراً بأستخدام B_1, B_2, B_3 كصفوف نحصل على المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

التي تحول المصفوفة A الى مصفوفة قطرية

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

اي ان $D = PAP^T$ والقارىء مدعو لتحقيق ذلك .

الان نبرهن المبرهنة (6.1.3) .

برهان المبرهنة (6.1.3) :

اختر اي قاعدة $H = \{B_1, \dots, B_n\}$ الى V. لتكن M مصفوفة الدالة ثنائية الخطية المتناظرة

$$f: V \times V \to R$$

بالنسبة للقاعدة H اعلاه .

M مصفوفة متناظرة حقيقية ، عليه توجد مصفوفة عمودية P تحقق

$$PMP^T = D$$

حيث ان D مصفوفة قطرية . (ذلك بتطبيق المبرهنة (6.1.6)) . نستخدم P لتغيير القاعدة والحصول على قاعدة جديدة :

$$S = \{ A_1, \dots, A_n \}$$

حيث :

$$A_1 = P_{11} B_1 + \dots + P_{1n} B_n$$
$$\vdots$$
$$A_n = P_{n1} B_1 + \dots + P_{nn} B_n$$

اي ان P مصفوفة الانتقال من القاعدة S الى القاعدة H . المبرهنة (6.1.2) تنص على ان مصفوفة الدالة f بالنسبة للقاعدة S تكون

$$PMP^T = D$$

(و . هـ . م)

مثال (10) :

جد قاعدة للفضاء R^2 تجعل من مصفوفة الدالة ثنائية الخطية

$$f: R^2 \times R^2 \to R$$

المعرفة بالصيغة :

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2 + y_1y_2$$

مصفوفة قطرية .

الحل : لتكن $\{ A_1 = (1,0), A_2 = (0,1) \}$ = S القاعدة الطبيعية الى R^2 .
ان مصفوفة f بالنسبة لهذه القاعدة .

$$M(f) = \begin{bmatrix} f(A_1, A_1) & f(A_1, A_2) \\ f(A_2, A_1) & f(A_2, A_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

لاحظ ان هذه المصفوفة متناظرة لكن ليست قطرية . لغرض تحويلها الى مصفوفة قطرية يجب علينا ايجاد القيم الذاتية .

المعادلة المميزة للمصفوفة M(f) تكون

$$\left| M(f) - tI \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - t & 2 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} = 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

القيم الذاتية : $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

لغرض الحصول على المتجهات الذاتية التابعة للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 3$ علينا حل المعادلة المصفوفية :

$$(x,y)\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = (0,0)$$

التي تؤدي الى معادلة خطية واحدة :

$$-2x + 2y = 0$$
$$y = x$$

لذلك فإن $X_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ يكون متجهاً ذاتياً احادي الطول تابعاً للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 3$ وبالطريقة نفسها نحصل على $X_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ كمتجه ذاتي احادي الطول تابع للقيمة الذاتية $\lambda_2 = -1$. لذلك نحصل على مصفوفة عمودية .

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

هذه المصفوفة تحقق :

$$PMP^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نستخدم هذه المصفوفة لتغيير القاعدة S الى قاعدة مكونة من المتجهين B_1, B_2 حيث :

$$B_1 = (1/\sqrt{2})A_1 + (1/\sqrt{2})A_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

$$B_2 = (-1/\sqrt{2})A_1 + (1/\sqrt{2})A_2 = (-1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2})$$

ان مصفوفة f بالنسبة للقاعدة اعلاه ستكون قطرية مساوية الى :

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

تمارين (6.1)

1 ـــ اذا كان $A = (x_1, y_1)$ ، $B = (x_2, y_2)$ اي متجهين في R^2 فأي من الدوال R $f: R^2 \times R^2 \rightarrow R$ يكون دالة ثنائية الخطية على R^2 .

(أ) $f(A, B) = x_1 x_2 + 5y_1 y_2 + 3$.

(ب) $f(A, B) = 7x_1 y_2 - 2x_2 y_1$.

(ج) $f(A, B) = 1 + x_1 x_2 - y_1 y_2$.

(د) $f(A, B) = 2x_1^2 + 3y_2^2$.

(هـ) $f(A, B) = x_1 y_1 x_2 y_2$.

2 ـــ اذا كان $A = (u_1, v_1, w_1)$ ، $B = (u_2, v_2, w_2)$ اي متجهين في الفضاء C^3 على الحقل C فأي من الدوال $f: C^3 \times C^3 \rightarrow C$ يكون دالة ثنائية الخطية على C^3 .

(أ) $f(A, B) = u_1 u_2 - iv_1 w_2 + (1 + i) w_1 v_2$

(ب) $f(A, B) = (2-3i) + u_1 w_2 - v_1 u_2$

(ج) $f(A, B) = -iu_1 w_2$

(د) $f(A, B) = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 - iu_2^2 + (1 + i) w_2^2$

(هـ) $f(A, B) = (2 + 4i)u_1 - v_2 + w_2$

3 ــ ليكن $P_2(R)$ له القاعدة الطبيعية $\{1, x, x^2\}$. اوجد الدوال الثنائية الخطية $f: P_2(R) \times P_2(R) \rightarrow R$ التي تنتج من المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

4 ــ ليكن R^4 له القاعدة المكونة من المتجهات

$A_1 = (0, 1, 0, 0)$, $A_2 = (-2, 0, 0, 0)$, $A_3 = (0, 0, 1/2, 0)$, $A_4 = (0, 0, 0, 3)$

اوجد الدوال الثنائية الخطية $f: R^4 \times R^4 \rightarrow R$ التي تنتج من المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

5 ــ اوجد مصفوفة الدالة ثنائية الخطية $f: C^2 \times C^2 \rightarrow C$ المعرفة بالصيغة $f((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = iz_1w_2 - (1+i)\, z_2w_1$ وذلك بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1 = (i, o)\,,\, A_2 = (0, -1)\}$.

6 ـــ اوجد مصفوفة كل دالة ثنائية الخطية على R^2 ظهرت في تمرين (1) وذلك بالنسبة للقاعدة الطبيعية .

7 ـــ اوجد مصفوفة كل دالة ثنائية الخطية على C^3 ظهرت في تمرين (2) وذلك بالنسبة للقاعدة الطبيعية .

8 ـــ اوجد مصفوفة الدالة ثنائية الخطية $f: P_1(R) \times P_1(R) \rightarrow R$ المعرفة بالصيغة $f(a_1 + b_1x, a_2 + b_2x) = 2a_1b_2 - a_2b_1$ وذلك بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1 = -1 + x, A_2 = 3x\}$.

9 ـــ اذا كان $A = (x_1, y_1, z_1)$ ، $B = (x_2, y_2, z_2)$ اي متجهين في R^3 فأي من الدوال ثنائية الخطية $f: R^3 \times R^3 \rightarrow R$ تكون متناظرة .

(أ) $f(A, B) = x_1 x_2 - 2y_1y_2 + 3z_1z_2$

(ب) $f(A, B) = 2x_1 y_2 + 3y_1z_2 - z_1x_2$

(ج) $f(A, B) = 2x_1x_2 - 3x_1z_2 + y_1z_2 + 4y_1x_2 - z_1y_2$

(د) $f(A, B) = x_1x_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2 - z_1y_2 - y_1z_2$

10 ـــ اوجد مصفوفة عمودية P تحقق PAP^T تكون مصفوفة قطرية .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

11 ـــ كرر تمرين (10) بالنسبة للمصفوفات

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & 0 & \frac{-24}{25} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{-24}{25} & 0 & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12 ــ اوجد قاعدة الى R^2 تجعل من مصفوفة الدالة الثنائية الخطية المتناظرة بالنسبة لها مصفوفة قطرية ، حيث $f: R^2 \times R^2 \rightarrow R$ تكون كما يلي :

(أ) $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 5x_1x_2 + 3\sqrt{3}x_1y_2 + 3\sqrt{3}y_1x_2 - y_1y_2$

(ب) $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 3x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3y_1y_2$

13 ــ كرر المطلوب في تمرين (11) بالنسبة الى R^3 والدوال التالية :

(أ) $f(A, B) = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_1z_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2 - y_1z_2 - z_1x_2 - z_1y_2 + 2z_1z_2$

(ب) $f(A, B) = -2x_1x_2 - 36x_1z_2 - 3y_1y_2 - 36z_1x_2 - 23z_1z_2$

حيث ان $A = (x_1, y_1, z_1)$ ، $B = (x_2, y_2, z_2)$

(6.2) الدوال التربيعية والصيغ التربيعية .

Quadratic Functions & Quadratic Forms

لأي حقل F ، التخصيص $k^2 \leftarrow k$ يعرف دالة تربيعية متجانسة $q: F \rightarrow F$. لهذه الدالة خاصيتين مميزتين : الاولى $q(-k) = q(k)$ ، والثانية

$$q(k + t) - q(k) - q(t) = (k + t)^2 - k^2 - t^2 = 2kt$$

والصيغة 2kt تعتبر دالة ثنائية الخطية على F . لأي فضاء متجهات منتهي البعد V على الحقل F ، الدالة

$$q: V \rightarrow F$$

المعرفة بالصيغة :

$$q(A) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

حيث ان $X = (x_1, \ldots, x_n)$ هو متجه احداثيات A بالنسبة لقاعدة ثابتة الى V ، تكون دالة تربيعية متجانسة تحقق الخاصيتين اعلاه . هاتان الخاصيتان سوف تستخدمان لتعريف الدوال التربيعية بصورة عامة . بعد التعريف سنقدم تطبيقاً مهماً في موضوع التفاضل والتكامل . سنركز دراستنا على الدوال التربيعية على فضاءات على حقل الاعداد الحقيقية .

تعريف :

اذا كان V فضاء متجهات على حقل الاعداد الحقيقية ، فبدالة تربيعية متجانسة على V نقصد دالة :

$$Q: V \rightarrow R$$

تحقق :

① $Q(A) = Q(-A)$ لكل $A \in V$.

② الدالة $f: V \times V \rightarrow R$.

المعرفة بالصيغة :

$$f(A, B) = (1/2)(Q(A + B) - Q(A) - Q(B))$$

تكون دالة ثنائية الخطية على V .

مثال (1) :

الدالة $Q: R^2 \rightarrow R$ المعرفة بالصيغة $Q(x,y) = x^2 + 2y^2$

تكون دالة تربيعية متجانسة وذلك لأن :

$$Q(x,y) = Q(-x, -y) \qquad (1)$$

$$h((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (1/2)\ (Q((x_1,y_1) + (x_2,y_2)) - Q(x_1,y_1) - Q(x_2,y_2))$$

. . . . (2)

$$= (1/2)\ (Q(x_1 + x_2, y_1 + y_2) - Q(x_1,y_1) - Q(x_2, y_2))$$

$$= (1/2)\ ((x_1 + x_2)^2 + 2(y_1 + y_2)^2 - (x_1^2 + 2y_1^2) - (x_2^2 + 2y_2^2))$$

$$= (1/2)\ (2x_1x_2 + 4y_1y_2) = x_1x_2 + 2y_1y_2$$

هذه الدالة عبارة عن دالة ثنائية الخطية على R^2 .

مثال (2) :

الدالة $Q: M_2(R) \rightarrow R$ المعرفة بالصيغة

$$Q\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = x_1^2$$

تكون دالة تربيعية متجانسة والتحقيق مماثل للمثال (1) اعلاه .

مثال (3) :

الدالة $Q: R^3 \rightarrow R$ المعرفة بالصيغة

$$Q(x, y, z) = x^2 - xy + yz$$

تكون دالة تربيعية متجانسة على R^3 وذلك لان :

$$Q(-x, -y, -z) = (-x)^2 - (-x)(-y) + (-y)(-z) \quad --- \quad (1)$$

$$= x^2 - xy + yz$$

$$= Q(x, y, z)$$

(2)

$$(1/2)[Q((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) - Q(x_1, y_1, z_1) - Q(x_2, y_2, z_2)]$$

...

$$=(1/2)\ (x_1+x_2)^2 - (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (y_1+y_2)(z_1+z_2)$$

$$(x_1^2 - x_1y_1 + y_1z_1) - (x_2^2 - x_2y_2 + y_2z_2)]$$

$$= x_1x_2 - (1/2)x_1y_2 - (1/2)x_2y_1 + (1/2)y_1z_2 + (1/2)y_2z_1$$

وهذه دالة ثنائية الخطية على R^3 .

سوف نبرهن بعض الخصائص التي تتمتع بها الدوال التربيعية المتجانسة .

مبرهنة (6.2.1) :

كل دالة تربيعية متجانسة $Q: V \rightarrow R$ على فضاء متجهات منتهي البعد V على حقل الاعداد الحقيقية ، تحقق :

$$Q(O) = O \qquad (1)$$

$$Q(2A) = 4Q(A) \quad \text{لكل متجه} \quad A \in V \qquad (2)$$

البرهان :

لأي ثلاثة متجهات A, B, C في V نلاحظ مايلي

$$Q(A + B + C) - Q(A) - Q(B + C) = 2f(A, B + C)$$

حيث ان $f: V \times V \rightarrow R$ تلك الدالة ثنائية الخطية التي تحقق :

$$Q(A + B) - Q(A) - Q(B) = 2f(A, B)$$

اذن :

$$Q(A + B + C) - Q(A) - Q(B + C) = 2(f(A, B) + f(A, C))$$

$$= 2f(A, B) + 2f(A, C)$$

$$= Q(A + B) - Q(A) - Q(B) + Q(A + C) - Q(A) - Q(C)$$

يمكن كتابة المعادلة اعلاه بالصيغة :

$$Q(A + B + C) - Q(A + B) - Q(A + C) - Q(B + C) + Q(A) + Q(B) + Q(C) = O$$

اذا وضعنا $A = B = C = O$ في المعادلة اعلاه ، نحصل على

$$Q(O) = O$$

اما اذا عوضنا : $B = A , C = -A$ فنحصل على

$$Q(A) - Q(2A) + Q(A) + Q(A) + Q(-A) = O$$

بما ان $Q(A) = Q(-A)$. اذن

$$Q(2A) = 4Q(A)$$

(و . هـ . م)

لأي دالة تربيعية متجانسة $Q: V \rightarrow R$ ، الدالة ثنائية الخطية

$$h: V \times V \rightarrow R$$

المعرفة بالصيغة :

$$h(A, B) = (1/2)[Q(A + B) - Q(A) - Q(B)]$$

تكون دالة ثنائية الخطية متناظرة وتسمى الدالة ثنائية الخطية الناتجة من استقطاب (Polarizing) الدالة التربيعية المتجانسة Q .

سوف نبرهن على ان كل دالة ثنائية الخطية ومتناظرة يمكن الحصول عليها بأستقطاب دالة تربيعية متجانسة وحيدة .

مبرهنة (6.2.2) :

ليكن V فضاء متجهات منتهي البعد وعلى حقل الاعداد الحقيقية . كل دالة ثنائية الخطية متناظرة $f: V \times V \rightarrow R$ تعرف دالة تربيعية متجانسة $Q: V \rightarrow R$ بالصيغة :

$$Q(A) = f(A, A) , A \in V$$

هذه الدالة التربيعية المتجانسة هي الوحيدة التي تحقق :

$$f(A, B) = 1/2 [Q(A + B) - Q(A) - Q(B)]$$

البرهان :

نبرهن اولاً على ان الدالة $Q: V \rightarrow R$ المعرفة بالصيغة اعلاه تكون دالة تربيعية متجانسة . لهذا الغرض نلاحظ اولاً :

$$Q(-A) = f(-A, -A) = (-1)^2 f(A, A) = Q(A)$$

بما ان f ثنائية الخطية ومتناظرة فنحصل على :

$$(1/2)[Q(A + B) - Q(A) - Q(B)] = (1/2)[f(A + B , A + B) - f(A,A) - f(B,B)]$$

$$= (1/2)[f(A, B) + f(B, A)]$$

$$= f (A, B)$$

بذلك تكون الدالة Q المعرفة اعلاه تربيعية متجانسة وذلك بضوء التعريف . على العكس ، لو فرضنا ان $\acute{Q}: V \rightarrow R$ دالة تربيعية متجانسة تحقق :

$$f(A,B)=(1/2)(\acute{Q}(A+B)-\acute{Q}(A)-\acute{Q}(B))$$

فإن :

$$2f(A,A)=\acute{Q}(2A)-\acute{Q}(A)-\acute{Q}(A)$$
$$=\acute{Q}(2A)-2\acute{Q}(A)$$
$$=4\acute{Q}(A)-2\acute{Q}(A)$$
$$=2\acute{Q}(A)$$

واذن :

$$\acute{Q}(A)=f(A,A)=Q(A)$$

وذلك لكل $A \in V$. اي ان $Q=\acute{Q}$

(و . هـ . م)

مثال (4) :

جد الدالة ثنائية الخطية المتناظرة $f: R^3 \times R^3 \rightarrow R$ التي تنتج من استقطاب الدالة التربيعية المتجانسة $Q: R^3 \rightarrow R$ والمعرفة بالصيغة :

$$Q(x,y,z)=xy+2yz$$

الحل : ليكن $A=(x_1, y_1, z_1)$ و $B=(x_2, y_2, z_2)$ ·الدالة ثنائية الخطية المتناظرة $f: R^3 \times R^3 \rightarrow R$ التي تنتج من استقطاب Q يجب ان تحقق :

$$f(A,B)=(1/2)(Q(A+B)-Q(A)-Q(B))$$

$$=(1/2)(Q(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)-Q(x_1, y_1, z_1)-Q(x_2, y_2, z_2))$$

$$=(1/2)((x_1+x_2)(y_1+y_2)+2(y_1+y_2)(z_1+z_2)-x_1y_1-2y_1z_1-x_2y_2-2y_2z_2)$$

$$=(1/2)(x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1)$$

مثال (5) :

جد الدالة التربيعية المتجانسة $Q: R^3 \to R$ المرتبطة بالدالة ثنائية الخطية المتناظرة $f:R^3 \times R^3 \to R$ والمعرفة بالصيغة :

$$f((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 - y_1z_2$$

الحل :

$$Q(A) = f(A, A)$$

$$Q(x, y, z) = f((x, y, z), (x, y, z))$$

$$= (x)(x) - (y)(z)$$

$$= x^2 - yz$$

لقد رأينا في البند السابق ان الدالة ثنائية الخطية المتناظرة تتعين بصورة كاملة بمصفوفة متناظرة وقاعدة للفضاء المعرفة عليه. كذلك رأينا في هذا البند ان الدالة التربيعية المتجانسة على فضاء تتعين بصورة كاملة بدالة ثنائية الخطية ومتناظرة على ذلك الفضاء وبالعكس (مبرهنة 6.2.2). وعليه فإن اي مصفوفة متناظرة وقاعدة للفضاء V تعينان دالة تربيعية متجانسة على V وبالعكس فإن اي دالة تربيعية متجانسة وقاعدة الى V تعين مصفوفة متناظرة وكما موضح في المثال التالي :

مثال (6) :

جد المصفوفة المتناظرة التي تمثل الدالة التربيعية المتجانسة $Q:R^2 \to R$ المعرفة بالصيغة : $Q(x,y) = x^2 - xy + 3y^2$ ، وذلك بالنسبة للقاعدة الطبيعية .

الحل: الدالة التربيعية اعلاه تعرف دالة ثنائية الخطية متناظرة $f: R^2 \times R^2 \to R$. بالصيغة :

$$f(A, B) = (1/2)(Q(A + B) - Q(A) - Q(B))$$

لتكن: $A = (1,0)$ ، $B = (0,1)$ عناصر القاعدة الطبيعية عليه يكون لدينا:

$$f(A,A) = Q(A) = (1)^2 - (1)(0) + 3(o)^2 = 1$$

$$f(A, B) = (1/2)(Q(1,1) - Q(1,0) - Q(0,1))$$

$$= (1/2)(3 - 1 - 3) = -1/2$$

$$f(B, A) = f(A, B) = -1/2$$

$$f(B, B) = Q(B) = 3$$

اذن تكون مصفوفة f بالنسبة للقاعدة الطبيعية كما يلي.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

هذه هي مصفوفة الدالة التربيعية اعلاه ولغرض التحقق من ذلك لاحظ ان متجه احداثيات $A = (x,y)$ بالنسبة للقاعدة الطبيعية هو (x,y) نفسه، عليه يكون.

$$Q(A) = f(A, A) = (x, y) M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

اي ان

$$Q(x,y) = (x,y) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (x - (1/2)y, (-1/2)x + 3y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= x^2 - xy + 3y^2$$

ان طريقة حل المثال اعلاه، طريقة بدائية وطويلة، حيث وجدنا مصفوفة الدالة التربيعية المتجانسة من خلال الدالة ثنائية الخطية التي تنتج من استقطابها. لندرس الحالة بصورة اكثر تفصيلاً.

لنفرض اننا اعطينا دالة تربيعية متجانسة $Q: V \to R$ ولنفرض ان $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$ قاعدة ثابتة الى V . لتكن M المصفوفة المتناظرة التي تنتج من الدالة ثنائية الخطية $f: V \times V \to R$ التي نحصل عليها من استقطاب Q، اي ان:

$$f(A, B) = (1/2)[Q(A + B) - Q(A) - Q(B)]$$

وبذلك يكون: $Q(A) = f(A, A)$ لأي متجه $A \in V$. اذا كان $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ متجه احداثيات $A \in V$ بالنسبة للقاعدة $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$، فإن

$$Q(A) = f(A, A) = XMX^T$$

حيث كما ذكرنا، ان $M = (a_{ij})$ مصفوفة f بالنسبة للقاعدة S.

الآن:

$$Q(A) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Q(A) = a_{11}x_1^{\ 2} + a_{22}x_2^{\ 2} + \ldots + a_{nn}x_n^{\ 2} + 2\sum_{i<j} a_{ij}\ x_i x_j$$

تعريف : يُسمى التعبير :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{11}x^2 + \ldots + a_{nn}x_n^{\ 2} + \ 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j$$

صيغة تربيعية متجانسة بالمتغيرات $x_1, \ldots, x_n$.

اذا وجد مايشير الى ثبوت قاعدة الفضاء V ، فإنه بالامكان كتابة .

$$Q\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ x_i\ x_j$$

ونسمي هذا صيغة تربيعية بالمتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

مثال (7) :

جد المصفوفات المتناظرة لكل من الصيغ التربيعية التالية :

$Q(x, y) = x^2 - xy + 3y^2$ .....(i)

$Q(x, y, z) = -x^2 + 4xy + 2y^2 + 6xz - 5yz$ ....(ii)

الحل : كما لاحظنا اعلاه ، فإنه في المصفوفة $M = (a_{ij})$ التي تمثل $Q\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ يكون العنصر القطري a_{ii} مساوياً لمعامل $x_i^{\ 2}$ كما يكون كل من العنصرين a_{ij} ، a_{ji} مساوياً لنصف معامل $x_i\ x_j$ وهكذا فإن :

(i) مصفوفة $Q(x,y) = x^2 - xy + 3y^2$ تكون

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/3 & 3 \end{bmatrix}$$

(ii) مصفوفة $Q(x,y,z) = -x^2 + 4xy + 2y^2 + 6xz - 5yz$ تكون

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -5/2 \\ 3 & -5/2 & 0 \end{bmatrix}$$

المسألة الاساسية في بندنا هذا تتمثل في امكانية كتابة الصيغة التربيعية بمتغيرات جدد بحيث تتحول الى صيغة بسيطة. المبرهنة (6.1.3) تنص على وجود قاعدة للفضاء V تجعل من مصفوفة اي دالة ثنائية الخطية متناظرة $f: V \times V \to R$ بالنسبة لها قطرية.

تعريف :

الصيغة التربيعية : $a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$ تسمى صيغة قطرية .

التعريف اعلاه ورد لكون مصفوفة الصيغة اعلاه قطرية .

مبرهنة (6.2.3) :

اذا كانت $Q: V \to R$ دالة تربيعية متجانسة على فضاء المتجهات V المنتهي البعد وعلى حقل الاعداد الحقيقية ، فإنه توجد قاعدة الى V تجعل من مصفوفة Q بالنسبة لها قطرية .

المبرهنة اعلاه نتيجة مباشرة للمبرهنة (6.1.3) ولعلاقة الدوال التربيعية المتجانسة بالدوال ثنائية الخطية المتناظرة .

ان النتيجة بالنسبة للصيغ التربيعية وتحويلها الى صيغ قطرية بمتغيرات جدد تكمن في المبرهنة التالية ، التي هي صورة اخرى من صور المبرهنة (6.2.3) اعلاه .

مبرهنة (6.2.4) :

كل صيغة تربيعية $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ بالمتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ قابلة للتحول الى صيغة قطرية $\sum_{i=1}^{n} b_{ii}\, y_i^2$ ، بمتغيرات جدد $y_1, \ldots, y_n$ وذلك على حقل الاعداد الحقيقية .

المبرهنة اعلاه ، هي ايضاً نتيجة مباشرة لكل ماذكرناه سابقاً .

مثال (8) :

جد قاعدة للفضاء R^2 تجعل من مصفوفة الدالة التربيعية

$$Q: R^2 \rightarrow R$$

المعرفة بالصيغة :

$$Q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$$

مصفوفة قطرية .

الحل :

ان مصفوفة الدالة التربيعية اعلاه بالنسبة للقاعدة الطبيعية ، تكون

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

راجع المثال (7)، لكيفية استخراج هذه المصفوفة. نحاول الان ايجاد مصفوفة P تحقق: PMP^T تكون قطرية. والحل يكمن بأيجاد القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة M وهذا موجود في المثال (9) من البند السابق، حيث تكون:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

والمصفوفة القطرية:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

والقاعدة المطلوبة، هي تلك القاعدة الناتجة من تأثير المصفوفة P على القاعدة الطبيعية $S = \{A_1 = (1,0), A_2 = (0,1)\}$. اي ان

$$B_1 = 1/\sqrt{2}\,A_1 + 1/\sqrt{2}\,A_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

$$B_2 = -1/\sqrt{2}\,A_1 + 1/\sqrt{2}\,A_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

مثال (9):

اكتب الصيغة التربيعية

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

بمتغيرات جدد y_1, y_2 بحيث تكون قطرية.

الحل:

السؤال اعلاه مشابه الى حد ما السؤال في المثال السابق. لقد رأينا في

المثال السابق ان مصفوفة Q بالنسبة للقاعدة الطبيعية $S = \{A_1, A_2\}$ تكون :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة : $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ، تحقق

$$PMP^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ان مصفوفة Q اعلاه بالنسبة للقاعدة

$$\{ B_1 = (1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}), B_2 = (-1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}) \}$$

تكون قطرية وتساوي $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ هذا يعني انه لو وضعنا

$$(y_1, y_2) = (x_1, x_2)\, P^{-1}$$

لاصبح (y_1, y_2) متجه احداثيات (x_1, x_2) بالنسبة للقاعدة الجديدة $\{B_1, B_2\}$

بما ان P مصفوفة عمودية ، اذن $P^{-1} = P^T$.

$$(y_1, y_2) = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \left((1/\sqrt{2})(x_1 + x_2), \quad (1/\sqrt{2})(-x_1 + x_2) \right)$$

هذا يعني ان

$$y_1 = (1/\sqrt{2})(x_1 + x_2)$$

$$y_2 = (1/\sqrt{2})(-x_1 + x_2)$$

هي المتغيرات الجدد التي تحقق:

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

$$= (x_1, x_2)\, M\, (x_1, x_2)^T$$

$$= (y_1, y_2)\, PM((y_1, y_2)\, P)^T$$

$$= (y_1, y_2)\, PMP^T\, (y_1, y_2)^T$$

$$= (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (y_1, y_2)^T$$

$$= 3y_1^2 - y_2^2$$

المثال اعلاه يوضح مسألة تدوير المحاور فلو طلب منا على سبيل المثال رسم المنحني الذي معادلته: $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 1$ لعرفنا انها معادلة من الدرجة الثانية ويجب ان تمثل احد القطوع المخروطية. في التفاضل والتكامل كانت هذه المسألة تأخذ جانباً مهماً وكان الطالب يفهم بإن التعويض:

$$x_1 = (1/\sqrt{2})(y_1 - y_2)$$

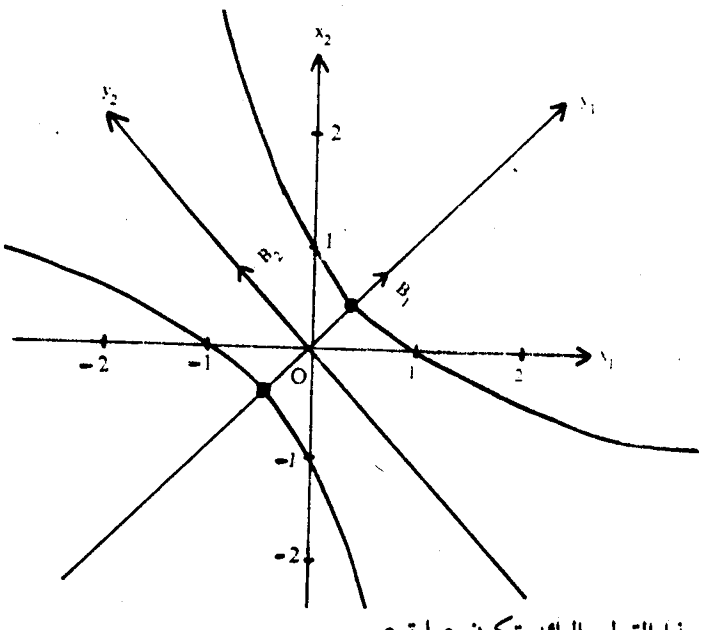
$$x_2 = (1/\sqrt{2})(y_1 + y_2)$$

يؤدي الى حذف الحد x_1x_2 الذي هو سبب الاشكال والغموض في معرفة ماتمثله المعادلة من قطع مخروطي.

التعويض اعلاه يؤدي الى تدوير المحاور والحصول على معادلة

$$3y_1^2 - y_2^2 = 1$$

والتي تمثل قطع زائد (Hyperbola) . انظر الشكل ادناه .



ان رؤس هذا القطع الزائد تكون عبارة عن

$$(y_1, y_2) = (\pm \quad 1/\sqrt{3}, 0)$$

اما الاحداثيات (x_1, x_2) لهذه الرؤوس فإنها ستكون :

$$(x_1, x_2) = \pm \ (1/\sqrt{3})(\ 1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2})$$

مثال (10) :

صف القطع المخروطي C الذي معادلته هي

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

الحل: ان الصيغة المصفوفية للمعادلة اعلاه هي

$$XAX^T - 36 = 0$$

حيث :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad X = (x, y)$$

لغرض تبسيط المعادلة اعلاه ، نحول الصيغة التربيعية XAX^T الى صيغة قطرية وذلك بإيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A .

المعادلة المميزة للمصفوفة A هي

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

واذن القيمتان الذاتيتان للمصفوفة A هما $\lambda = 4$ ، $\lambda = 9$. المتجهات الذاتية التابعة للقيمة $\lambda = 4$ هي الحلول غير الصفرية للنظام .

$$(x \; , \; y) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \; , \; 0$$

الذي يؤدي الى المعادلة : $x = 2y$

وبذلك يكون المتجه : (2, 1) قاعدة للفضاء الذاتي التابع للقيمة $\lambda = 4$. نأخذ المتجه :

$$A_1 = (\; 2/\sqrt{5}\,, \quad 1/\sqrt{5})$$

احادي الطول .

وبالمثل يكون $A_2 = (-\; 1/\sqrt{5}\;, \quad 2/\sqrt{5})$ متجهاً ذاتياً احادي الطول تابعاً للقيمة الذاتية $\lambda = 9$.

ضع :

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

عندئذ يكون :

$$PAP^T = D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

والتعويض :

$$X = (x, y) = (x', y')\,P = X'P$$

يؤدي الى :

$$(X'P)\,A\,(X'P)^T - 36 = 0$$

$$X'(PAP^T)\,X'^T - 36 = 0$$

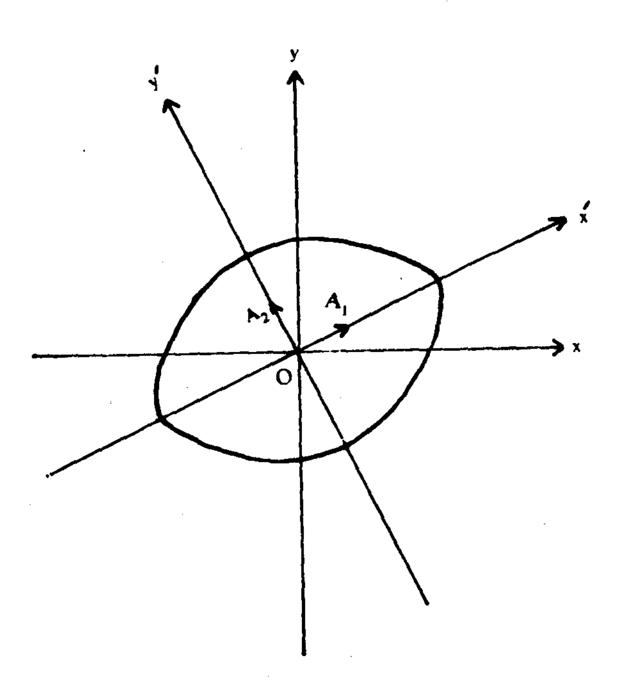
$$(x', y')\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 36 = 0$$

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها بالصيغة

$$x'^2/9 + y'^2/4 = 1$$

وهذه معادلة قطع ناقص رسمه في الشكل ادناه .



مثال (11) :

صف السطح الذي معادلته

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$$

الحل : ان الصيغة المصفوفية للمعادلة اعلاه هي $XAX^T - 3 = 0$ حيث ان :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad X = (x, y, z)$$

كما تبين في مثال (9) من البند (6.1)، القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda = 2$، $\lambda = 8$ وتكون A قابلة للاقطار بواسطة المصفوفة العمودية

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

حيث ان متجهي الصفين الاولين في P هما متجهان ذاتيان تابعان للقيمة الذاتية $\lambda = 2$ و متجه الصف الثالث هو متجه ذاتي تابع للقيمة الذاتية $\lambda = 8$.

ان تحويل الاحداثيات:

$$X = (x, y, z) = (x', y', z')P = X'P$$

يحول المعادلة $XAX^T - 3 = 0$، عند التعويض الى المعادلة:

$$(X'P)\,A\,(X'P)^T - 3 = 0$$

$$X'(PAP^T)\,X'^T - 3 = 0$$

لكن:

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

اذن المعادلة اعلاه تصبح

$$(x', y', z') \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - 3 = 0$$

اي $$2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = 3$$

وهذه يمكن كتابتها على الصورة

$$x'^2/(3/2) + y'^2/(3/2) + z'^2/(3/8) = 1$$

وهي معادلة سطح ناقص (Ellipsoide) .

مثال (12) :

إرسم المنحني الذي تمثله المعادلة

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 30x - 40y = 0$$

الحل: ان المشكلة الاساسية في معرفة ماتمثله المعادلة اعلاه من قطع مخروطي تكمن في الحد xy . لذلك بأمكاننا اولاً النظر الى الصيغة التربيعية المتجانسة والموجودة في المعادلة اعلاه . هذه الصيغة هي :

$$16x^2 - 24xy + 9y^2$$

مصفوفة الصيغة اعلاه هي المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

سوف نحول الصيغة اعلاه الى صيغة قطرية .

اولاً : نحسب القيم الذاتية

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} 16 - t & -12 \\ -12 & 9 - t \end{vmatrix}$$

$$= (16 - t)(9 - t) - 144$$

$$= t^2 - 25t + 144 - 144$$

$$= t^2 - 25t = t(t - 25)$$

القيم الذاتية للمصفوفة A تكون : $\lambda_1 = 0$ ، $\lambda_2 = 25$.المتجهات الذاتية التابعة للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 0$ هي الحلول غير الصفرية للنظام

$$(x, y)\begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} = (0,0)$$

الذي يؤدي الى المعادلتين الخطيتين :

$$16x - 12y = 0$$

$$-12x + 9y = 0$$

هاتان المعادلتان عبارة عن معادلة واحدة $4x - 3y = 0$ والحل سيكون $y = (4/3)x$.
نأخذ $x = 3$ ونحصل على المتجه $(3,4)$ ومنه نحصل على المتجه $A = (3/5, 4/5)$ كمتجه ذاتي احادي الطول تالع للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 0$.

بالمثل نحصل على المتجه $B = (-4/5, 3/5)$ كمتجه ذاتي احادي الطول تابع للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 25$.

الآن ضع $P = \begin{pmatrix} 3/3 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ ولاحظ ان P مصفوفة عمودية تحقق

$$P\,A\,P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

لو وضعنا $(x,y) = (x', y')\,P$ اى

$$(x,y) = (x',y') \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

لحصلنا على :

$$x = \frac{1}{5}(3x' - 4y')$$

$$y = \frac{1}{5}(4x' + 3y')$$

فعند التعويض عن x, y بالمتغيرات الجدد x', y' بالصيغة التربيعية

$$16x^2 - 24xy + 9y^2$$

نحصل على الصيغة القطرية : $25\,y'^2$

نرجع الان الى المعادلة الاصلية

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 30x - 40y = 0$$

ونعوض بالمتغيرين الجدد x', y' فنحصل على المعادلة

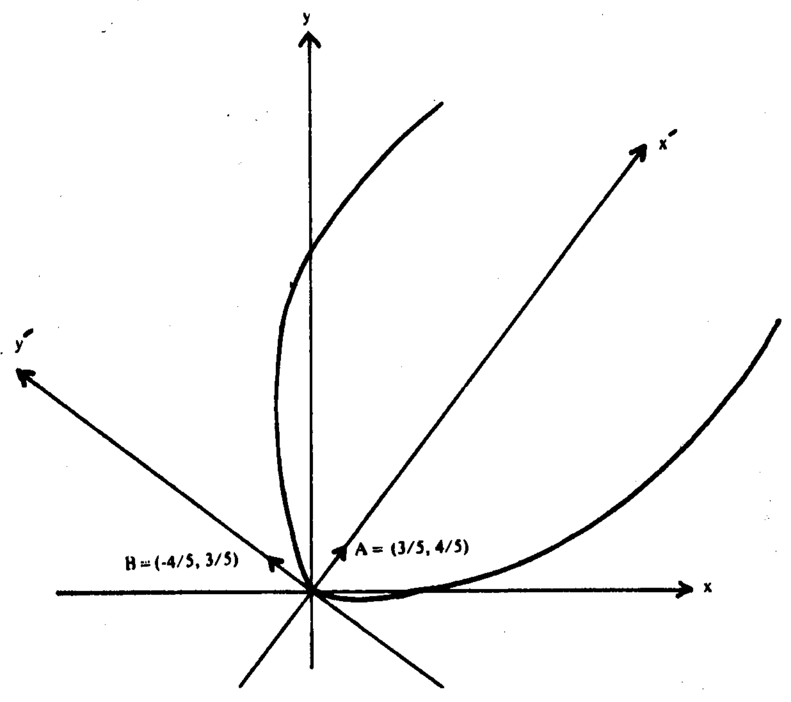
$$25y'^2 - 30 \cdot \frac{1}{5}(3x' - 4y') - 40 \cdot \frac{1}{5}(4x' + 3y') = 0$$

$$25y'^2 - 18x' + 24y' - 32x' - 24y' = 0$$

$$25y'^2 - 50x' = 0$$

$$y'^2 = 2x'$$

الان يمكن تميز المعادلة اعلاه كمعادلة قطع مكافئ (Parabola)
ورسم المنحني في الشكل ادناه



ملاحظة : بضبط اشارات المتجهات الذاتية احرص على ان يكون

$|F| = +1$ لكي يكون التحويل الخطي العمودى الناشى من تدويراللمحاور

تمارين (6.2)

(١) اى ان الدوال الاتية يكون دالة تربيعية متجانسة :

(أ) $Q(x,y)=x^2-2xy+6y^2 \quad , \quad Q: R^2 \longrightarrow R$

(ب) $Q(x,y,z)=x^2+xz-2yz+3xy, Q: R^3 \longrightarrow R$

(ج) $Q(a+bx+cx^2)=abc \quad , \quad Q: P_2(R) \longrightarrow R$

(هـ) $Q\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=x^2+y^2+z^2+w^2+2 \quad , \quad Q:M_2(R) \longrightarrow R$

2 ــ اوجد الدوال ثنائية الخطية الناتجة من استقطاب كل من الدوال التربيعية المتجانسة التالية .

(أ) $Q: R^2 \to R$ ، $Q(x, y) = 3x^2 - xy$.

(ب) $Q: C^2 \to R$ ، $Q(z_1, z_2) = z_1{}^2 - 2 z_2{}^2$

حيث ان C^2 فضاء متجهات على حقل الاعداد الحقيقية .

(ج) $Q: R^3 \to R$ ، $Q(x, y, z) = xy - xz + 3yz - \sqrt{2}y^2$.

(هـ) $Q: R^4 \to R$ ، $Q(x,y,z,w) = xz + 3yw + x^2 - w^2$.

3 ــ اذا كانت $Q: V \to R$ دالة تربيعية متجانسة فبرهن على ان $Q(rA) = r^2Q(A)$ وذلك لكل متجه $A \in V$ ولكل عدد حقيقي r .

4 ــ اذا كان V فضاء متجهات منتهي البعد وعلى حقل الاعداد الحقيقية واذا كانت $Q: V \to R$ دالة تربيعية متجانسة على V فبرهن على ان الدالة ثنائية الخطية $h: V \times V \to R$ التي تنتج من استقطاب Q تعرف ضرباً داخلياً على V .

5 ــ اي من الصيغ التالية يكون صيغة تربيعية بالمتغيرات x, y, z .

(أ) $2x^2 - 2xy + xz + y$.

(ب) $x^2 - y^2 + z^2 + 3yz$.

(ج) $10 + x^2 - y^2 + 3xy - xz$.

(د) $xz - xy$.

6 ــ اكتب كل من الصيغ التربيعية التالية بالصيغة المصفوفية .

(أ) $2x^2 + 3xy - 4xz + yz - 2y^2 + 3z^2$.

(ب) $x^2 + xy - xz + 4yz - 3xw + y^2 + 9z^2 - w^2$.

(ج) $(1/2)x^2 + w^2 - z^2 + 3y^2 + 4xz - 3xw + yw + 6xy$

(ملاحظة : ترتيب المتغيرات x, y, z, w)

7 ــ اوجد الدوال التربيعية المتجانسة الناتجة من الدوال ثنائية الخطية في كل مما يلي :

(أ) $h: R^2 \times R^2 \to R$ ، $h(A, B) = x_1x_2 - y_1y_2 + x_1y_2$.

(ب) $h: R^3 \times R^3 \to R$ ، $h(C, D) = y_1z_2 - x_1y_2 + 3z_1x_2 - y_1x_2$.

حيث $A = (x_1, y_1)$ ، $B = (x_2, y_2)$ ، $C = (x_1, y_1, z_1)$

، $D = (x_2, y_2, z_2)$.

8 ــ اكتب كل من الصيغ التربيعية التالية بمتغيرات جدد بحيث تكون قطرية .

(أ) $3x^2 + 5xy + 7y^2$.

(ب) $21x^2 + 6xy + 13y^2$.

(ج) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz$.

(د) $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz$.

9 ــ ارسم كل من القطوع المخروطية التالية .

(أ) $8x^2 - 12xy + 17y^2 - 80 = 0$.

ب) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4 = 0$.

ج) $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0$.

د) $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 6x + 8y + 15 = 0$.

هـ) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 30x + 40y - 5 = 0$.

المصـــادر باللغـــة الانكليزيـــة

(1) Birkhoff and MacLane: A Survey of Modern Algebra (MACMILLAN) 1965.

(2) T. J. Fletcher: Linear Algebra through its applications (Van Nostrand Reinhold) 1972.

(3) Greub Werner: Linear Algebra (Springer- Verlage) 1975.

(4) B. HARTLEY and T. O. HAWKES: Rings, Modules and Linear Algebra (Chapman and Hall) 1970.

(5) S. Lang: Linear Algebra (Addison - Wesley) 1973.

(6) MacLane, Birkhoff: Algebra (MACMILLAN) 1971.

(7) Mostow and Sampson: Linear Algebra (Mc Graw - Hill) 1969.

(8) Paige L. J, J. D. Swift: Elements of Linear Algebra (Blaisdell Publishing Company) 1961.

(9) Paige L. J., J. D. Swift, T. A. Slobko: Elments of Linear Algebra; Second Edition (XEROX Çollege Publishing, Lexington) 1974.

(10) Smith L. : Linear Algebra (Springer - Verlage) 1978.

(11) STEWART F. M.: Introduction to Linear Algebra (Van-Nostrand, East West Press) 1963.

المصـــادر باللغــة العربيــة

1 ـــ هوارد انتون : الجبر الخطي المبسط (الطبعة الثانية)

WILEY ARABOOK (1982) .

2 ـــ سيمور ليبشتز : نظريات ومسائل في الجبر الخطي سلسلة ملخصات سشوم (دار ماكجرو هيل للنشر) (1976) .

معجم المصطلحات

عربي ـــ انكليزي

اتحاد	Union
أثر	Trace
احداثيات	Coordinates
ارتباط خطي	Linear Dependance
استقطاب	Polarizing
إستقلال خطي	Linear Independance
بُعد	Dimension
تافه	Trivial
تجميعي	Associative
تحويل خطي	Linear Transformation
تحويل عمودي	Orthogonal Transformation
تحويل محايد	Identity transformation
تركيب الدوال	Composition of functions
تشاكل	Isomorphism
تقاطع	Intersection
تكرار جبري	Algebraic Multiplicity
تكرار هندسي	Geometric Multiplicity
ثنائي الخطية	Bilinear
جمع مباشر	Direct Sum
حقل	Field
حقيقي	Real
خطي	Linear
دالة	Function

Identity function	دالة محايدة
Rank	رتبه
Group	زمرة
Abelian Group	زمرة تبادلية
Nullity	صفرية
Image	صورة
Normal Form	صيغة اعتيادية
Quadratic Form	صيغة تربيعية
Inner Product	ضرب داخلي
Block multiplication	ضرب قالبي
Scalor Product	ضرب قياسي
Dot product	ضرب نقطي
Complex	عقدي
Orthogonal	عمودي
Identity element	عنصر محايد
Non - Singular	غير معتل
Subspace	فضاء جزئي
Vector Space	فضاء متجهات
Diagonalizable	قابل للاقطار
Invertable	قابل للقلب
Basis	قاعدة
Natural Basis	قاعدة طبيعية
Orthogonal Basis	قاعدة متعامدة
Orthonormal Basis	قاعدة متعامدة احادية
Hyperbola	قطع زائد
Conic Section	قطع مخروطي
Parabola	قطع مكافىء

Ellipse	قطع ناقص
Eigen Value	قيمة ذاتية
Homogeneous	متجانس
Eigen Vector	متجه ذاتي
Polynomial	متعددة حدود
Orthogonal Complement	متمم عمودي
Symmetric	متناظر
Skew Symmetric	متناظر متخالف
Determinant	محدد
Component	مركبة
Transpose	مدورة
Continuous	مستمر
Plane	مستوي
Projection	مسقط
Similar	مشابه
Identity matrix	مصفوفة محايدة
Orthogonal matrix	مصفوفة عمودية
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Singular	معتل
Inverse	نظير
Left inverse	نظير أيسر
Right inverse	نظير ايمن
Characteristic	مميزة
Kernel	نواة